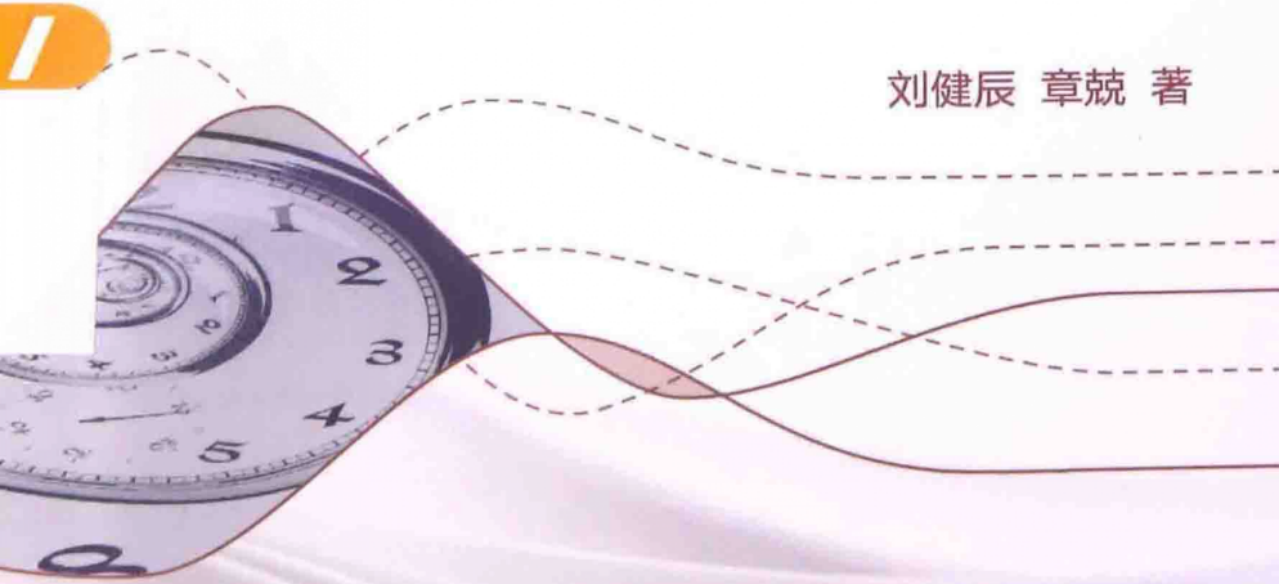
时滞系统分析与综合

——基于finsler引理的新框架

SHIZHI XITONG
FENXI YU ZONGHE

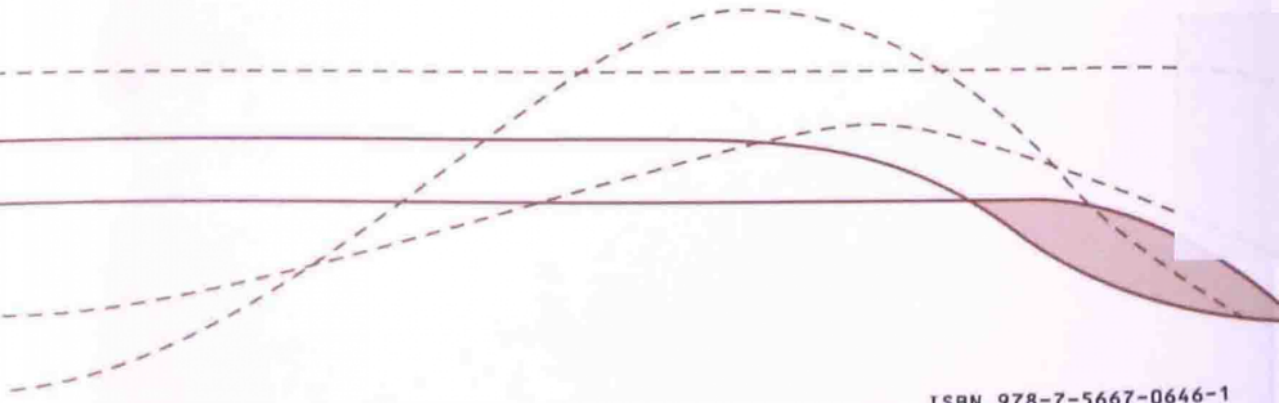
刘健辰 章兢 著



湖南大学出版社

SHIZHI XITONG
FENXI YU ZONGHE

责任编辑：张建平　金红艳
装帧设计：多米诺设计·咨询　吴颖辉　龙欢



ISBN 978-7-5667-0646-1
9 787566 706461 >
定价：15.00元

时滞系统分析与综合

——基于 Finsler 引理的新框架

刘健辰　章　兢　著

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书针对基于简单 LKF 方法的时滞系统分析和综合问题，提出了一个基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架。在此框架下，本书提出了分析、解决相关问题的途径和方法。

本书可供大专院校教师、研究生和高年级学生阅读，也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

时滞系统分析与综合——基于 Finsler 引理的新框架/刘健辰，章兢著．—长沙：湖南大学出版社，2014.5

ISBN 978-7-5667-0646-1

Ⅰ.①时… Ⅱ.①刘… ②章… Ⅲ.①时滞系统—系统分析—研究 Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 089202 号

时滞系统分析与综合——基于 Finsler 引理的新框架

SHIZHI XITONG FENXI YU ZONGHE——JIYU FINSLER YINLI DE XINKUANGJIA

作　　者：刘健辰　章　兢　**著**

责任编辑：张建平　金红艳　**责任印制**：陈　燕

印　　装：虎彩印艺股份有限公司

开　　本：880×1230　32 开　**印张**：6　**字数**：188 千

版　　次：2014 年 6 月第 1 版　**印次**：2014 年 6 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5667-0646-1/TP·86

定　　价：15.00 元

出 版 人：雷　鸣

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　**邮　　编**：410082

电　　话：0731-88822559(发行部)，88820006(编辑室)，88821006(出版部)

传　　真：0731-88649312(发行部)，88822264(总编室)

网　　址：http://www.hnupress.com　**电子邮箱**：presszhangjp@hnu.cn

版权所有，盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错，请与发行部联系

前　言

时滞现象广泛存在于各种自然和工程系统中，而且往往成为系统性能恶化甚至失稳的根源。由于其所具有的理论和实际价值，时滞系统的分析和综合一直以来都是控制界的重要研究领域。近年来，由于网络化控制系统等新兴研究问题的出现，时滞系统问题重新获得了国内外研究者的关注。

时滞系统的研究方法大体可以分为时域方法和频域方法两大类。纵观最近十几年来的研究成果，以时域方法中的简单 LKF 方法为主流。从状态空间的角度，时滞对系统的影响表现为从有限维到无限维，而这一特点决定了基于简单 LKF 方法的时滞系统稳定性判据只能是充分条件，降低保守性和减少计算量构成了控制算法得以实用化的两个关键。需要指出的是对于时滞系统的研究虽然历时已久，而且成果颇丰，但是仍然有一些重要问题亟待解决。例如，如何将名目繁多的已有方法纳入到一个统一的研究框架，并在此框架下分析和发现解决两个关键问题的根本途径，进而改进已有算法的性能。

本书在作者近年来研究工作的基础上，针对基于简单 LKF 方法的时滞系统分析和综合问题，提出了一个基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架。基于该框架可以分析已有四种方法（模型变换方法、自由权矩阵方法、积分不等式方法和 Jensen 不等式方法）的联系，也可以构造新的等价方法，更重要的是可以明确地发现引入自由矩阵的多少和方式只是问题的表面，解决 LKF 微分的定界问题的核心在于“解耦”。引入自由矩阵的唯一目的在于解除变量之间的耦合，以便于有效求解。在完成“解耦”的情况下引入尽量少的自由矩阵，可以最大程度地减少计算量。在此基础上，针对 LKF 的构造问题，通过引入更多的系统时滞信息，进一步减小稳定性判据的保守性。在基于简

单 LKF 的时滞系统综合方面，针对控制器设计中不可避免涉及的非线性矩阵不等式的求解问题，提出三种改进的时滞相关控制器设计算法。然后，本书将针对连续时间分立型线性系统建立的研究框架，推广到离散时间时滞系统、中立型非线性系统、时滞 Markov 跳变系统和时滞 T-S 模糊系统的分析和综合问题中，解决了一些新问题，也取得了一系列对已有结果的改进。最后，作为一个主要应用领域，将本书提出的时滞系统方法，应用于网络控制系统的分析和综合问题。

全书共 8 章。第 1 章系统地分析和总结时滞系统分析和综合这一研究领域的发展现状及研究方法，给出与本书相关的一些预备知识。第 2 章建立基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架，进而结合三重积分法、广义模型法和时变时滞分解法，提出一系列具有更小保守性的改进稳定性判据。特别是深入讨论了乘子矩阵结构对所得结果保守性的影响。第 3 章，针对离散时间时滞系统稳定性分析问题，分别基于“1-X”定界法、Finsler 引理法和反凸函数法提出了一些改进的稳定性判据，并尝试证明三种方法之间的严格数学关系。第 4 章针对时滞系统控制器设计中的非线性矩阵不等式问题，提出三种改进的控制器设计算法：随机间接迭代算法、直接控制器设计算法和基于 BMI 方法的控制器求解算法。第 5 章，采用指数模型变换方法和多胞覆盖技术，以及时滞分解思想，研究时变时滞中立型系统的时滞相关指数稳定性问题和具有时变时滞的中立型系统的绝对稳定性问题。第 6 章，研究具有区间时变时滞的 Markov 跳变系统的随机稳定及有界实问题和具有区间时变时滞的离散广义 Markov 跳变系统的容许性问题。第 7 章，研究具有区间时变时滞的离散 T-S 模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。基于改进的 SLPM 算法，提出求解模糊 H_∞ 控制器的迭代算法。第 8 章，综合考虑网络化控制中存在的时滞、丢包和量化问题，基于时滞系统方法研究网络控制系统分析和设计问题。特别是，利用网络控制系统的锯齿形时变时滞特性和控制信号的脉冲特性，提出一种保守性更低的稳定性判据。

本书研究内容得到国家自然科学基金（编号：61174140）、高等学校博士学科点专项科研基金（编号：20110161110035）和辽宁省教育厅科

学研究一般项目(编号:L2013130)的资助。另外,本书的写作得到了许多学者的关心和帮助,他们的研究成果给予了作者很好的启发。湖南大学何敏博士、博士生张红强等参加了本书部分内容的编写、仿真和校对工作,在此向他们表示衷心的感谢。最后,非常感谢湖南大学出版社对本书顺利出版所给予的帮助。

由于作者水平有限,本书难免存在不妥之处,恳请读者不吝指教。

作 者

2014 年 4 月

目　次

第 1 章　绪　论

1.1　时滞系统及其稳定性分析 …… 1
1.2　简单-LKF 方法的历史回顾与局限性探讨 …… 10
1.3　本书研究内容和组织安排 …… 18
1.4　符号说明和引理 …… 20

第 2 章　连续时间线性时滞系统稳定性分析

2.1　定常时滞系统稳定性分析 …… 22
2.2　时变时滞系统情况 …… 28
2.3　鲁棒稳定性分析 …… 33
2.4　时变时滞系统稳定性判据：改进的三重积分法 …… 36
2.5　改进的时变时滞分解法 …… 43
2.5.1　时变时滞分解法一：分段分析法 …… 43
2.5.2　时变时滞分解法二：状态增广法 …… 47
2.5.3　数值算例和比较研究 …… 50

第 3 章　离散时间线性时滞系统稳定性分析

3.1　稳定性分析之一："1-X"定界法 …… 53
3.2　稳定性分析之二：Finsler 引理方法 …… 56
3.3　稳定性分析之三：反凸函数法 …… 57
3.4　各种方法之间的联系 …… 58
3.5　数值算例和计算量分析 …… 61
3.5.1　数值算例 …… 61
3.5.2　计算量分析 …… 62

第 4 章　线性时滞系统的控制器设计

4.1　随机初始化间接迭代算法 …… 63

4.2 基于 Finsler 引理的直接算法 …… 66
4.3 基于 BMI 的迭代算法 …… 67
4.4 数值分析 …… 69
4.5 TCP/AQM 系统设计 …… 72
4.6 网络化 AGC 系统控制 …… 76

第 5 章 时变时滞中立型系统的稳定性分析

5.1 时变时滞中立型系统的指数稳定性分析 …… 84
5.2 时变时滞中立型系统的绝对稳定性分析 …… 90

第 6 章 时滞 Markov 跳变系统的稳定性和有界实分析

6.1 连续时间区间时滞 Markov 跳变系统的稳定性和有界实分析 …… 100
6.1.1 系统描述和预备引理 …… 100
6.1.2 主要结果 …… 101
6.1.3 数值算例 …… 107
6.2 时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的稳定性分析 …… 109
6.2.1 问题描述和引理 …… 109
6.2.2 主要结果 …… 110
6.2.3 数值算例 …… 117

第 7 章 时滞离散 T-S 模糊系统的分析和综合

7.1 系统描述 …… 126
7.2 主要结果 …… 129
7.3 数值算例 …… 135
7.4 本章小结 …… 138

第 8 章 时滞系统方法在网络控制系统中的应用

8.1 网络控制系统的时滞相关镇定控制器设计 …… 140
8.2 考虑量化影响的网络控制系统 …… 146
8.3 基于脉冲时滞系统模型的网络控制系统分析 …… 159

参考文献 …… 164

第1章 绪 论

1.1 时滞系统及其稳定性分析

时滞现象在物理和生物系统以及实际生产生活中广泛存在，如系统信号的量测(特别是复杂的在线分析仪)、长管道进料或皮带传输、缓慢的化学反应过程等，也常见于电路、光学、神经网络、生态环境、数据网络及冶金工业、建筑结构、机械传动等领域。由于应用背景广泛，一直深受众多研究者的关注。时滞系统分析涉及泛函微分方程理论，而泛函微分方程的研究要远远困难于常微分方程。考虑如下定常时滞微分方程(1.1)：Equation Chapter 1 Section 1

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-h,0],\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $h>0$ 为定常时滞，初始条件由定义在 $[-h,0]$ 上的连续可微函数 $\varphi(t)$ 确定，系统在 $t>0$ 时的行为不仅依赖于 0 时刻的状态，而且与时间段 $[-h,0]$ 内的状态有关，可见时滞特性使系统具有某种“记忆”能力。时滞系统(1.1)是一个无穷维的系统，其特征方程是含有指数函数的超越方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_de^{-h\lambda})=0\tag{1.2}$$

有无穷多个特征根。而对于离散时滞系统，系统维数随时滞的增加而几何增长，这给系统的稳定性分析和控制器设计带来了困难。因此对时滞系统的分析和控制，无论在理论还是在工程实践方面都极具挑战性。

时滞系统一般分成以下三类：

(1)分立时滞(discrete delay)系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h_x) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{u}(t-h_u), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_h\boldsymbol{x}(t-h_y), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 h_x,h_u 和 h_y 分别是状态时滞、输入时滞和输出时滞。分立时滞系统的“记忆”具有“局部”特性,即其仅仅记忆了过去某个时刻的状态和输入。

分立时滞系统举例:(循环式化工生产过程[1])

在化工生产中,化学反应常常不是完全的。例如:$A \to B$,在有限时间内由 A 到 B 的转化不能达到 100%,这时一般采用循环反应方式,即通过管道将反应产物中未反应的 A 重新传输到反应釜中。循环式化工生产过程可以用如下具有分立时滞的非线性微分方程描述:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q}{V}[\lambda A_0 + (1-\lambda)A(t-\tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}}A(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{V}[\lambda T_0 - (1-\lambda)T(t-\tau) - T(t)]\dfrac{\Delta H}{C\rho} - K_0 e^{-\frac{Q}{T}}A(t) - \\ \qquad \dfrac{1}{VC\rho}U(T(t) - T_w), \end{cases}$$

其中 $A(t)$ 和 $T(t)$ 分别为 A 的浓度和温度,$\lambda \in [0,1]$ 为循环系数,τ 为输送时滞。

(2)分布时滞(distributed delay)系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \int_{-h_x}^{0}\boldsymbol{A}_h\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \int_{-h_u}^{0}\boldsymbol{B}_h\boldsymbol{u}(t+\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{1.4}$$

与分立时滞系统相反,分布时滞系统中的时滞具有在整个时滞区间的分散性影响,而不是局部影响。

分布时滞系统举例:(传染病 SIR 模型[2])

$$\begin{cases}\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \beta\int_h^{\infty}\gamma(\tau)S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ \dot{R}(t) = \beta\int_h^{\infty}\gamma(\tau)S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{cases}$$

其中 S、I 和 R 分别为易感(Susceptible)人群人数、感染(Infectious)人

群人数和康复(Recovered)人群人数。时滞 τ 为康复时间,取值因人而异,取值范围为 $[h,\infty)$ 且概率密度为 $\gamma(\tau)$。

(3)中立时滞(neutral delay)系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{x}}(t-h)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \tag{1.5}$$

该系统的特点是时滞并不是从系统状态输入或引入,而是引入到系统状态的高阶微分项。

中立时滞系统举例:(集中供热系统[3])

集中供热系统的最简单模型由一个锅炉、一组散热器以及供热管路组成。假设管道内热水流速恒定,仅仅考虑温度控制,且忽略不计供热管路的热量损失。下面首先建立各个分立器件的数学模型。

散热器模型:假设散热器被分为 N 个单元,则各个散热单元的温度 T_j 满足:

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=\frac{NH_q q}{C}[T_{\text{input}}-(1-\varphi)T_1-\varphi T_2]-\frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_1-T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1},$$

$$\frac{\mathrm{d}T_j}{\mathrm{d}t}=\frac{NH_q q}{C}[(1-\varphi)T_{j-1}-(2\varphi-1)T_j-\varphi T_{j+1}]-\frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_j-T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1},j=2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}T_N}{\mathrm{d}t}=\frac{NH_q q}{C}[T_{N-1}-T_N]-\frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_N-T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1}。$$

而输出功率满足:

$$P_{rad}=\frac{\Phi_0}{N}\sum_{j-1}^{N}\left(\frac{T_j-T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1},$$

其中 $H_q=C_p\rho$,ρ 为水的密度,C_p 为水的热容,C 为散热器的热容,q 为热水流速,Φ_0 为散热器额定功率,T_{input} 为散热器入水温度。

锅炉模型:

$$C_b\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}t}=n_{com}(T_w)Q_b-\rho C_p q(T_{us}-T_{uw})-a_j(T_w-T_e),$$

其中 T_w 为锅炉中心温度,T_{us} 和 T_{uw} 分别为锅炉出水和入水温度,T_e 为锅炉房室温,a_j 为锅炉保温层散热率,Q_b 为锅炉的能量输入。$n_{com}(T_w)$ 为锅炉燃烧效率,一般可以表示为:

$$n_{com}(T_w)=a_1+a_2\frac{T_w}{T_{w,\max}},$$

其中 $T_{w,\max}$ 为 T_w 的最大值。T_w 与 T_{us} 和 T_{wv} 的关系为：

$$T_w = aT_{wv} + (1-a)T_{us}, \quad 0 < a < 1。$$

室温模型：

$$\frac{\mathrm{d}T_r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_r R_w}[T_{\mathrm{out}} - T_r] + \frac{1}{C_r}P_{rad}。$$

其中 T_r 为被控室温，T_{out} 为室外温度，C_r 为房间热容，R_w 为外墙热阻。

综合以上各式，并且根据如下关系：

$$T_{\mathrm{input}} = T_{us}(t-\tau_1), T_{wv} = T_N(t-\tau_2),$$

其中 τ_1 和 τ_2 分别为热水由锅炉流至散热器和由散热器返回锅炉所用时间，可得到如下的系统总方程：

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{NH_q q}{C}[T_{us}(t-\tau_1) - (1-\varphi)T_1 - \varphi T_2] - \frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_1 - T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1},$$

$$\frac{\mathrm{d}T_j}{\mathrm{d}t} = \frac{NH_q q}{C}[(1-\varphi)T_{j-1} - (2\varphi-1)T_j - \varphi T_{j+1}] - \frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1}, j=2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}T_N}{\mathrm{d}t} = \frac{NH_q q}{C}[T_{N-1} - T_N] - \frac{\Phi_0}{C}\left(\frac{T_N - T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1},$$

$$\frac{\mathrm{d}T_{us}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_b(1-a)}n_{cm}(T_{us}, T_N(t-\tau_2))Q_b - \frac{\rho C_p q}{C_b(1-a)}(T_{us} - T_N(t-\tau_2))$$

$$- \frac{a_j}{C_b(1-a)}[aT_N(t-\tau_2) + (1-a)T_{us} - T_r] - \frac{a}{1-a}\dot{T}_N(t-\tau_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}T_r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_r R_w}[T_{out} - T_r] + \frac{1}{C_r}\frac{\Phi_0}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max,0}}\right)^{n_1}。$$

可见，该集中供热系统模型是一个中立时滞非线性微分方程组。

早期的研究都集中于如系统(1.1)的定常时滞系统，但在一些应用中(如网络控制、采样控制等)，时滞会变为时变。从统计信号分析的角度，时变时滞会使系统的统计特性变得不再是平稳。初看来，这似乎只是一个技术问题，但实际上时变时滞会引起特有的 Quenching(淬火)现象[4,5]。Quenching 现象是指：(1)对于任何 $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ 的稳定定常时滞系统，相应地在同样范围内变化的时变时滞系统可能不稳定；(2)对于任何 $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ 的不稳定的定常时滞系统，相应的在同样范围内变化的时变时滞系统可能稳定。Quenching 现象体现了时滞变化率所引起

的系统特性变化。

另一种有趣现象是，存在一些系统，当其无时滞时不稳定，而当其具有非零值时滞时会稳定。例如一个被广泛考虑的二阶系统：$\ddot{y}(t)-0.1\dot{y}(t)+2y(t)=u(t)$，使用静态时滞输出反馈 $u(t)=y(t-h)$，则可以表示为如下闭环系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0.1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t-h),$$

易知，当 $h\to\infty$ 和 $h\to 0$ 时，该系统均不稳定。实际上，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d$ 的特征值分别为：$\{0.05\pm 1.4133i\}$ 和 $\{0.05\pm 0.9987i\}$。通过解析法可以证明，对于在[0.10016826, 1.7178]区间内的任意时滞，该系统均稳定[6]。还存在一些工程和生物系统中的区间时滞系统的例子[7]。另外在网络控制系统中，也有必要采用区间时滞系统对网络诱导时滞和数据丢包进行建模[8]。

从工程角度看，时滞的存在往往导致系统性能恶化，甚至使系统失去稳定性。例如系统 $\dot{x}(t)=-0.5x(t)$ 是稳定的，但加入时滞项后，系统

$$\dot{x}(t)=-0.5x(t)+1.3x(t-1)$$

变得不稳定。但另一方面，也可以用时滞来改善系统特性，例如混沌控制中的时滞反馈控制方法。

稳定性分析是控制理论的基本问题，也是控制器设计和性能分析的基础。时滞系统稳定性分析的目的是找到计算简单并且保守性尽可能小的稳定性判据。时滞系统稳定性分析方法主要分为两类：频域方法和时域方法。

最早的稳定性分析方法是频域法，该方法通过分析特征方程根的分布来判别稳定性。时滞线性系统稳定的充分必要条件是闭环特征方程根均具有负实部。但是由于时滞系统的特征方程是一个具有无穷多个解的超越方程，造成其稳定性分析要比无时滞系统困难得多，并且频域法难于处理时变时滞、时变不确定性参数和非线性系统。在专著[9]中总结了频域法的主要研究成果。

时域法是目前时滞系统分析和综合的主要方法，特别适于处理含

有不确定性或时变参数、时变时滞和非线性的时滞系统。时域法主要包括 Lyapunov-Krasovskii 泛函(LKF)法、Lyapunov-Razumikhin 函数(LRF)法、二次分离(quadratic separation, QS)方法、积分二次约束(integral quadratic constraint, IQC)方法和小增益定理(Small Gain Theorem)方法等。LKF 法和 LRF 法分别由 Krasovskii 和 Razumikhin 于 20 世纪 50 年代末提出,本质上都属于 Lyapunov 稳定性方法在时滞系统分析上的扩展,但是 LRF 法得到的结果一般比 LKF 法更为保守[10],故而较少采用。

Krasovskii 在 1963 年提出,用 LKF 取代传统意义上的二次 Lyapunov 函数,并在此基础上针对时滞系统给出一类新的稳定性分析方法,该思想可以通过下面的 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理进行描述。

引理 1.1 (Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理)考虑时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(t,\boldsymbol{x}(t)),\\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), t \in [-h,0],\end{cases} \tag{1.6}$$

如果存在连续可微函数 $V(t,\boldsymbol{x}(t))$,使得

$$u(\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{\varphi}) \leqslant v(\|\boldsymbol{\varphi}\|_c) \tag{1.7}$$

和

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{\varphi}) \leqslant V - w(\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|) \tag{1.8}$$

成立,则系统(1.6)一致稳定。其中,$u,v,w:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 是严格单调不减函数,满足 $u(s)>0, v(s)>0, s>0, u(0)=v(0)=0$。$\|\boldsymbol{\varphi}\|_c = \max\limits_{a \leqslant \theta \leqslant b} \|\boldsymbol{\varphi}(\theta)\|$ 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 函数的模。进而,如果满足 $w(s)>0, s>0$,则系统(1.6)一致渐近稳定。如果 $\lim\limits_{s\to\infty} u(s)=\infty$,则系统(1.6)一致全局渐近稳定。

基于 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理可以得到两类稳定性条件:一类条件不包含时滞,称为时滞无关(Delay-independent)条件。此时,LKF 取为

$$V_1(t,\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) + \int_{t-h}^{t} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{1.9}$$

其中 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}>0$。对式(1.9)求导,并利用引理 1.1 可得系统一致渐近稳定的充分条件为:如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}>0$,使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q} \end{bmatrix}<0 \tag{1.10}$$

成立，则系统(1.1)一致渐近稳定。

时滞无关条件(1.10)不含时滞信息，然而许多实际系统中的时滞一般都是有界的，无穷时滞很少出现。这种不考虑时滞大小的结论，因为适用于任意大小的时滞，当时滞有界时，或者时滞比较小时，是相当保守的。于是另一类条件更加引起人们的关注，即包含时滞信息的稳定性条件，被称为时滞相关(Delay-dependent)条件。近年来，时滞相关稳定性分析与控制综合，以及如何降低所得条件的保守性，已经成为控制理论界研究的热点问题。

需要说明的是，对于线性定常时滞系统而言，可以通过构造 Complete-LKF(完整-LKF)来得到时滞相关稳定性的充分必要条件。系统(1.1)时滞相关渐近稳定的充分必要条件为：存在定常矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，标量 $\varepsilon>0$ 和连续可微矩阵函数：$\boldsymbol{Q}(\xi):[-h,0]\to\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{S}(\xi)=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\xi):[-h,0]\to\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{R}(\xi,\eta)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\xi,\eta):[-h,0]^2\to\mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\int_{-h}^{0}\boldsymbol{Q}(s)\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s+ \\ &\quad \int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+s)\boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s+ \\ &\quad \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+s)\boldsymbol{R}(s,\eta)\boldsymbol{x}(t+\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s \\ &\quad \geqslant \varepsilon\|\boldsymbol{x}(t)\|^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}(0)+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(0)+\boldsymbol{S}(0)]\boldsymbol{x}(t)- \\ &\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{S}(-h)\boldsymbol{x}(t-h)- \\ &\quad \int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+s)\dot{\boldsymbol{S}}(s)\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d-\boldsymbol{Q}(-h)]\boldsymbol{x}(t-h)- \\ &\quad \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+s)\left[\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{R}(s,\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}\boldsymbol{R}(s,\eta)\right]\boldsymbol{x}(t+\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s+ \\ &\quad 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\int_{-h}^{0}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(s)-\dot{\boldsymbol{Q}}(s)+\boldsymbol{R}(0,s)]\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s+ \end{aligned}$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\int_{-h}^{0}[\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(s)-\boldsymbol{R}(-h,s)]\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant -\epsilon\,\|\boldsymbol{x}(t)\|^2。$$

虽然可以通过构造完整-LKF，避免任何保守性的引入，但由于这个二次泛函的决策变量是函数，会涉及一个无穷维优化问题，所以实际上无法通过数值计算检验这个二次泛函的存在性。为了克服这个问题，研究者退而求其次，寻求近似数值解法。其中，离散化(discretization)方法[10-13]和平方和(Sum of Squares，SOS)方法[5, 14, 15]是目前存在的主要方法。两种方法都存在计算量巨大的缺点，目前受到的关注相对较少。相对于完整-LKF，研究者更加乐于寻求不涉及无穷维优化和近似解法的简单方法，这类 LKF 方法一般称为简单(simple)-LKF 方法。与完整-LKF 方法不同，利用简单-LKF 方法只能得到充分稳定性条件，会存在无可避免的保守性，所以主要的研究方向自然就是如何在保持较小复杂性的前提下，有效减小保守性。

小增益定理是现代鲁棒控制理论的重要方法之一[16]，目前也被研究者引入时滞系统稳定性的分析[17-18]。下面以时滞无关稳定性分析为例，说明基于小增益定理的时滞系统分析原理。

在小增益定理研究框架下，首先需要将系统(1.1)变换为如下“LFT”(线性分式变换)形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{w}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{x}(t),\\ \boldsymbol{w}(t)=D_h(\boldsymbol{z}(t)),\end{cases}\tag{1.11}$$

其中 $D_h:\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{x}(t-h)$ 为线性算子，并可以证明其渐近稳定且具有有限 H_∞ 范数。实际上，对于定常时滞，如果该算子的输入信号有界，则由于其输出信号是输入信号的时域平移，也必有界，故而该算子稳定。另外，可以计算：

$$\int_0^{+\infty}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s-h)\boldsymbol{z}(s-h)\mathrm{d}s\underset{s'=s-h}{=}\int_{-h}^{+\infty}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s')\boldsymbol{z}(s')\mathrm{d}s'。$$

这样，在零初始条件下，有

$$\int_0^{+\infty}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s')\boldsymbol{z}(s')\mathrm{d}s',$$

故而算子 D_h 具有单位 H_∞ 范数。

接下来，定义 Hamiltonian 函数：

$$H(\boldsymbol{x}(t)) = S(\boldsymbol{x}(t)) - \int_0^t s(\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{x}(s-h))\mathrm{d}s, \tag{1.12}$$

其中 $S(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$ 为存储函数，供应率为

$$s(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{L} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{bmatrix}。$$

计算该 Hamiltonian 函数的微分，可得

$$\dot{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{bmatrix}。$$

在耗散理论框架下，由 $\dot{H}<0$ 可得系统渐近稳定，即如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 使得如下 LMI 成立，则系统渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{L} \end{bmatrix}<0。 \tag{1.13}$$

可见，条件(1.13)与(1.10)在本质上是相同的，与 Hamiltonian 函数(1.12)对应的 LKF 为

$$V(t,\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) + \int_{-h}^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta。$$

相似地，也可以由小增益定理建立时滞相关稳定性判据。

IQC 方法由 Rantzer 在 1997 年首先提出[19]，目前已经被应用于包括时滞系统稳定性分析在内的众多领域[20-25]。IQC 方法的核心是互联系统的 L_2 稳定性，对于定常时滞系统，所得结果与小增益定理方法相似。但是，IQC 方法可以有效处理时变时滞系统，而小增益定理方法却不能处理。另外，IQC 方法可以结合一些频域方法(如 *KYP* 引理)，获得保守性更小的结果[22]。

二次分离(quadratic separation，QS)源于互联系统稳定性分析中的适定性(well-posedness)理论[26]。最近，法国学者 Gouaisbaut 等将其引入到时滞系统稳定性分析中，取得了一系列有意义的成果。其中，文[27]首次将二次分离法用于定常时滞系统的稳定性分析。随后，文[28]将该方法推广到时变时滞情况。QS 方法与 IQC 方法类似，都可

以处理时变时滞情况，但 QS 方法有利于结合一些时域方法（比如：时变时滞算子的 Taylor 级数展开），可以取得更加精确的结果。最近，文[29]借鉴时变时滞分解思想，进一步改进了文[28]的结果。

1.2 简单-LKF 方法的历史回顾与局限性探讨

在 1.1 节中对已有的各种时滞系统稳定性分析方法进行了简单的总结，其中简单-LKF 是本书研究的重点，本小节将对该方法的核心思想和发展历史做进一步的讨论。对完整-LKF 方法的研究集中于如何近似求解无穷维优化问题，而对简单-LKF 方法的研究集中于两个方面：

(1)LKF 的构造；

(2)LKF 微分的定界。

这两个方面研究共同的目标是使所得的稳定性判据：

(1)简单，即所包含的求解变量尽量少；

(2)有效，即所具有的保守性尽量小。

需要说明的是，这里的“保守性”是指由于简单-LKF 法只能得到充分条件，所以导致有些系统本身是稳定的，但是却无法通过稳定性判据确定其稳定性。稳定性判据中所包含的求解变量分成两类：LKF 中包含的正定矩阵称为 Lyapunov 矩阵；在对 LKF 微分的定界过程中引入的矩阵，称为自由矩阵。

对于 LKF 的构造，为了简单，就需要包含尽量少的 Lyapunov 矩阵；为了有效，就需要包含尽量多的系统时滞信息。

对于 LKF 微分的定界，为了简单，就需要尽量少引入或不引入自由矩阵；为了有效，就需要避免不必要的放大，对 LKF 微分尽量精确地定界。

近十几年，在基于简单-LKF 方法的时滞系统分析方面，涌现了大量的研究成果，这些名目众多的成果大都宣称可以减小已有研究结果的保守性，但是也由于方法庞杂而造成了研究者的困惑。实际上，已有研究成果主要针对第二个研究问题，即 LKF 微分的定界问题，并且可

以分成四个发展阶段。下面简要回顾各个研究阶段的主要方法，以期梳理出一个清晰的发展轨迹。

第一种方法：模型变换和交叉项定界

自从1990年代，为了取得时滞相关稳定性条件，主要方法是在LKF(1.9)中增加一个二次型双积分项，即

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))=V_1(t,\boldsymbol{x}(t))+V_2(t,\boldsymbol{x}(t)), \tag{1.14}$$

其中$V_2(t,\boldsymbol{x}(t))$为二次型双积分项。

最初，$V_2(t,\boldsymbol{x}(t))$取为

$$V_2(t,\boldsymbol{x}(t))=\int_{-h}^{0}\int_{+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

对$V_2(t,\boldsymbol{x}(t))$求导，可得到

$$\dot{V}_2(t,\boldsymbol{x}(t))=h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)-\int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s。 \tag{1.15}$$

为了利用Lyapunov-Krasovksii稳定性定理获得时滞相关条件，必须处理式(1.15)右边的积分项。一种方法是利用Leibniz-Newton公式对系统(1.1)进行如下的模型变换。

模型变换Ⅰ(一阶模型变换)：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}_d\int_{-h}^{t}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(s-h)]\mathrm{d}s。 \tag{1.16}$$

由于(1.16)中出现了$\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(s-h)$，$s\in[0,-h]$项，故需取如下LKF：

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))=V_1(t,\boldsymbol{x}(t))+V_2(t,\boldsymbol{x}(t))+V_3(t,\boldsymbol{x}(t)), \tag{1.17}$$

其中

$$V_3(t,\boldsymbol{x}(t))=\int_{-2h}^{-h}\int_{+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\boldsymbol{S}>0。$$

对式(1.17)沿系统(1.16)求导，得到

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))=\Psi+\eta_1+\eta_2-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-2h}^{t-h}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s, \tag{1.18}$$

其中

$$\psi=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)+\boldsymbol{Q}+h(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})]\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h),$$

$$\eta_1 = -2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{A}\int_{-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\ \eta_2 = -2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{A}_d\int_{-2h}^{-h}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\ .$$

η_1 和 η_2 分别为状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 与积分项 $\int_{-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$ 或 $\int_{-2h}^{-h}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$ 的乘积，称为交叉项(Cross-term)。然后，利用如下的基本不等式抵消式(1.18)中的积分项。

基本不等式：对 $\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$，有如下不等式成立

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b},\tag{1.19}$$

得到

$$\eta_1\leqslant h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\tag{1.20}$$

$$\eta_2\leqslant h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-2h}^{-h}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\tag{1.21}$$

将式(1.20)和(1.21)代入式(1.18)，就可以抵消式(1.18)中的积分项，从而获得时滞相关条件。

另一种模型变换称为中立型模型变换，即将系统(1.1)变换成

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{x}(t),\tag{1.22}$$

该方法所得结果与模型变换 I 类似。

美国 Southern Illinois 大学 Gu Keqin 于 2000 年指出，模型变换 I 和中立型模型变换都将产生额外的动态特性，从而导致变换后的系统与原系统不等价，以及所得结果的保守性[30]。因此，人们开始寻求其他能保证等价性的模型变换，比如如下的模型变换 Ⅱ。

模型变换 Ⅱ：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}_d\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s,\tag{1.23}$$

考虑到其中的 $\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$ 项，需要取如下 LKF：

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))=V_1(t,\boldsymbol{x}(t))+V_4(t,\boldsymbol{x}(t)),\tag{1.24}$$

其中

$$V_4(t,\boldsymbol{x}(t))=\phi+\eta_3-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

对(1.24)求导，可得

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t)) = \Phi + \eta_3 - \int_{t-h}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s, \tag{1.25}$$

其中

$$\phi = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)+\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h) + h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t),$$

$$\eta_3 = -2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。$$

随后，以色列学者 Emilia Fridman 于 2001 年提出了一种新的模型变换——广义模型变换(模型变换Ⅲ)[31]，引起了学术界的广泛关注。

模型变换Ⅲ：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{y}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}_d\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1.26}$$

或

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\xi}(t) - \int_{t-h}^{t}\bar{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{\xi}(s)\mathrm{d}s, \tag{1.27}$$

其中

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{A}}_d = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{A}_d]。$$

再引入如下 LKF：

$$V(t,\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}(t) + \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{1.28}$$

对(1.28)求导，可得

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t)) = \Sigma + \eta_4 - \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s, \tag{1.29}$$

其中

$$\sum = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)[2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}} + \mathrm{diag}\{\boldsymbol{Q},h\boldsymbol{R}\}]\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h),$$

$$\eta_4 = -2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{\xi}(s)\mathrm{d}s。$$

同样地，对交叉项 η_4 进行定界即可抵消 LKF 导数(1.29)中的积分项，从而得到时滞相关稳定性条件。

分析以上三种模型变换方法，可以发现如下一条共同的研究思路：

时滞相关→引入二次型积分项 $\xrightarrow[\text{模型变换}]{}$ 交叉项 $\xrightarrow[\text{定界不等式}]{}$ 抵消二次型积分项。

即以得到时滞相关稳定性条件是最初目标，以引入双积分项为最初手段。为了处理 LKF 导数中出现了二次型积分项，又引入模型变换来以产生交叉项，最终通过交叉项定界来抵消该二次型积分项。

为了减小交叉项界定的保守性，研究者首先想到的是引入更多的自由度。1999 年，韩国学者 Park 提出了下面的 Park 不等式[32]。

Park 不等式：对 $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0,\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，如下不等式成立

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{RM}\\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{RM}+\boldsymbol{I})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}。\tag{1.30}$$

2001 年，Moon 通过引入更多的自由矩阵，得到了下面的 Moon 不等式[33]。

Moon 不等式：对于 $\forall \boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^{n_a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{n_b},\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{n_a\times n_b},\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n_a\times n_b},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n_a\times n_b}$ 和 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{n_a\times n_b}$，如果 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}\geqslant 0$，则有

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{b}\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}X & \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}。\tag{1.31}$$

利用 Park 不等式或 Moon 不等式，结合模型变换Ⅱ或模型变换Ⅲ，可以获得一系列时滞相关条件。

第二种方法：自由权矩阵(Free Weighting Matrices，FWM)方法

何勇等研究者发现，在使用模型变换Ⅱ和Ⅲ进行稳定性分析时，其本质上是基于 Leibniz-Newton 公式来部分替换 LKF 导数中的时滞项[34-35]。考虑系统(1.1)和 LKF(1.24)，如果不进行模型变换，而是直接计算(1.24)的导数，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))=&\ 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)-\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h)+h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\\ &\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{1.32}$$

然后，将系统方程(1.1)代入式(1.32)中的 $2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t)$ 项，可得

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[2\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h)+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)]-$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h)+h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\tag{1.33}$$

比较式(1.33)与式(1.25),可以发现式(1.25)是在式(1.33)的基础上加入一个恒等于零的项

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right],\tag{1.34}$$

从另一个角度看,加入一个恒零项(1.34)也等价于将式(1.32)中由$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)$产生的$\boldsymbol{x}(t-h)$替换为$\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$。

而在广义模型变换方法中,比较式(1.32)和式(1.29),可以发现式(1.29)是在式(1.32)的基础上加入一个恒等于零的项

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h)-\dot{\boldsymbol{x}}(t)],\tag{1.35}$$

再将其中的$\boldsymbol{x}(t-h)$替换为$\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$。

综合以上两种情况,可见:模型变换Ⅱ和Ⅲ都等价于引入一个恒零等式,其中式(1.34)由 Leibniz-Newton 公式得到,而式(1.35)由系统方程得到。当采用恒零等式(1.34)时,需要替换$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$,而当采用恒零等式(1.35)时,需要保留$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$。恒零等式(1.34)和(1.35)采用的是固定加权矩阵,如式(1.34)中$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)$的加权矩阵是$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)$和$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)$的加权矩阵是$\boldsymbol{0}$;而式(1.35)中$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)$的加权矩阵是$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$的加权矩阵为$\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}(t-h)$的加权矩阵是$\boldsymbol{0}$。

如果用未知的自由权矩阵代替固定加权矩阵,即对于任意的适维矩阵$\boldsymbol{M}_i$,$\boldsymbol{T}_i$,$i=1,2,3$,引入如下两个恒零等式:

(1)基于 Leibniz-Newton 公式的恒零等式:

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{N}_1+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{N}_3]\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]=0。\tag{1.36}$$

(2)基于系统方程的恒零等式:

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{T}_1+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{T}_3][\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h)]=0。\tag{1.37}$$

这种利用恒零等式(1.36)和式(1.37),引入自由权矩阵$\boldsymbol{M}_i$,$\boldsymbol{T}_i$,$i=1,2,3$的方法称为自由权矩阵方法[34,35]。从引入更多自由度的角

度，自由权矩阵方法可以减小模型变换方法的保守性。但是，与模型变换一样，使用自由权矩阵方法本质上只能引入交叉项，其后还是必须采用某种不等式对交叉项进行定界。已有文献中，都是使用基本不等式，但实际上也可以使用 Moon 不等式或 Park 不等式。

第三种方法：积分不等式方法

归根结底，不论是模型变换方法还是自由权矩阵方法都是设法引入交叉项，再对交叉项定界处理，来处理 LKF 导数中的二次型积分项。那为何不直接对这个二次型积分项进行定界呢？张先明等人使用 Moon 不等式或 Park 不等式对二次型积分项建立了一系列积分不等式（对离散系统，称为有限和不等式）[36-40]，其中以下积分不等式最为常用。

积分不等式：设 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 一阶连续可微，则对于任意适维矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$，$\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$，如下积分不等式成立：

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)+$$

$$h\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(t),\tag{1.38}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}(t)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h)\}$。

文[36]中由 Park 不等式得到积分不等式(1.38)，而实际上式(1.38)可以直接由恒零等式(1.39)：

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{M}_2]\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]=0\tag{1.39}$$

和基本不等式：

$$\int_{t-h}^{t}-2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{M}_2]\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{t-h}^{t}\begin{Bmatrix}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{M}_2]\boldsymbol{R}^{-1}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{M}_2]^{\mathrm{T}}+\\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\end{Bmatrix}\mathrm{d}s$$

得到。由此可见，积分不等式本质上就是自由权矩阵方法与基本交叉项定界不等式的集成，只是将原来的两步合并为一步完成。另外，文[36]中在由 Park 不等式得到积分不等式(1.38)时，将自由权矩阵 $\boldsymbol{M}_1$，

$\boldsymbol{M}_2$ 与 Park 不等式中的自由矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 进行了合并，这说明在引入自由权矩阵的情况下，Park 不等式中的自由矩阵将变得冗余。

第四种方法：Jensen 不等式方法

Jensen 不等式方法早在文[10]中就已提出，但由韩清龙在文[41]中第一次用于二次型积分项的有效定界，故一度被称为韩-积分不等式，而将(1.38)称为张-积分不等式。Jensen 不等式也是一种积分不等式，只是其中不包含任何自由矩阵。实际上，只要将(1.38)中的 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 分别固定为 $-h^{-1}\boldsymbol{R}$ 和 $h^{-1}\boldsymbol{R}$，即可得到。

Jensen 不等式：设 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 一阶连续可微，则对于任意适维矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$，如下积分不等式成立：

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\leqslant h^{-1}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{R}\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)。 \tag{1.40}$$

总结以上四种方法，可见：

(1)以二次型积分项的有效定界为根本目标。

(2)自由权矩阵方法对模型变换法引入了更多的自由度，模型变换法是自由权矩阵方法的特例。

(3)积分不等式法是对自由权矩阵法算法步骤的合并。

(4)Jensen 不等式法完全去除积分不等式法中的自由矩阵。

(5)各种方法的区别就在于引入了不同的自由矩阵，其中 Jensen 不等式是不包含任何自由矩阵的极端情况。

四种算法之间的关系可以由图 1.1 描述。

那么就产生了疑问：既然使用 Jensen 不等式法可以在不引入任何自由矩阵的情况下，解决二次型积分项的定界问题，那么是否就没有必要引入自由矩阵了呢？这就涉及这四种方法的等价性问题。最近，文[42-43]相继利用投影定理，从解空间相同的角度，证明了对于定常时滞系统，这四种方法所取得的结果[34, 41, 44-50]的等价性，从而对该问题给出了初步答案。但是，仍然存在一些问题没有解决：

(1)文[42-43]中的方法不够直接，无法直观解释各种方法之间的联系。

(2)无法解释自由矩阵的意义。

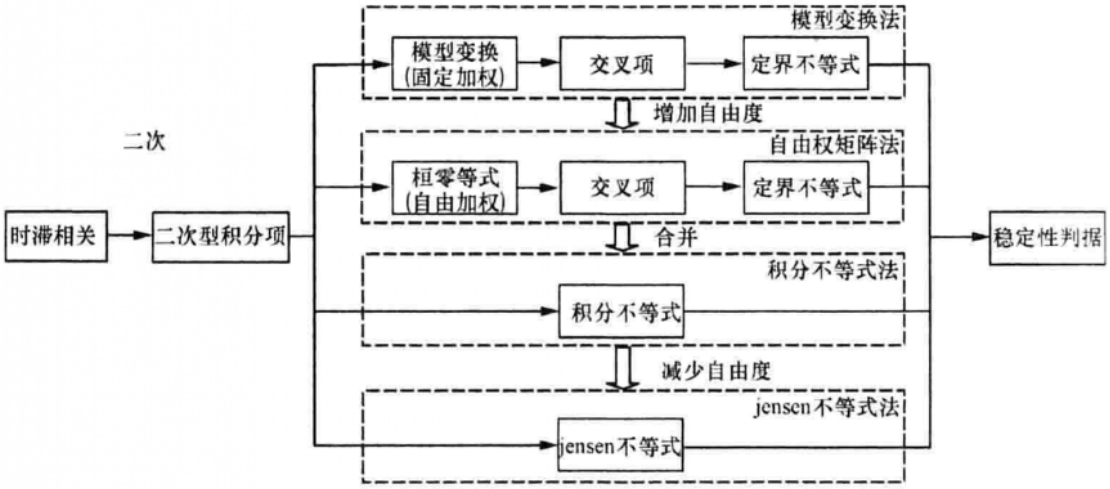


图 1.1　四种算法之间的关系

(3)这种等价性对于时变时滞系统,是否仍然成立?

这三个问题构成了本书研究的出发点。

如前所述,在基于简单-LKF 方法的时滞系统分析方面,除了研究更好地对 LKF 微分的进行定界之外,还需构造新的 LKF 来减小所得判据的保守性。在这方面,通过在 LKF 中引入三重积分项和时滞分解项是两种可行的方案,但是已有文献中的方法还存在较大的改进余地,如何改进三重积分法和时变时滞分解法是本书研究的另一个重点。

1.3　本书研究内容和组织安排

本书内容安排如下:

在第 2 章中,首先基于 Finsler 引理提出连续时间情况下定常时滞系统和时变时滞系统稳定性的等价的充分条件,从而建立一种时滞系统分析和综合的统一框架。进而,讨论当系统参数存在不确定性时的鲁棒稳定性分析问题。分别通过引入新的定界不等式和基于 Finsler 引理,得到新的基于三重积分法的稳定性判据,改进了文[51-53]的结果。采用文[53]中的广义模型,取得一个改进的时滞变化率上下界相关稳定性判据。最后,基于 Finsler 引理,提出两种改进的时变时滞分解法。

在第3章中，针对离散时间时变时滞系统建立稳定性判据，本章所采用的主要方法和所得结果与第2章呈平行关系。但是与第2章不同的是，本章并未研究离散时间时滞系统的时滞分解法，因为离散时间时滞的整数特性决定了应用时滞分解法将生硬而不自然，效果不佳。本章首先基于"1-X"定界法、Finsler引理法和反凸函数法提出一系列改进的稳定性判据，然后尝试证明三种方法之间的严格数学关系，这为理解本书提出的基于Finsler引理的时滞系统分析框架提供了新视角。

在第4章中，针对时滞系统控制器设计中的NLMI的求解问题，在分析文[54-56]研究结果的基础之上，提出改进的时滞相关控制器设计算法。进而，考虑将所提出的控制器设计算法应用于TCP/AQM系统控制和网络化AGC系统控制。

在第5章中，研究时变时滞中立型系统的时滞相关指数稳定性问题。为了消除对于时滞变化率必须小于1的限制，采用指数模型变换方法[57]。为了克服文[58]中的问题，采用多胞覆盖技术[59]将指数参数相关LMI问题转化为易于求解的多仿射参数相关LMI问题。研究时变时滞中立型系统的时滞相关绝对稳定性问题。为了改进文[60-62]中的结果，借鉴时滞分解[63]的思想，构造新的LKF。基于Finsler引理，得到保守性更小的绝对稳定性判据和鲁棒稳定性判据。

在第6章中，首先研究具有区间时变时滞的Markov跳变系统的稳定性和有界实。通过选择适当的LKF，基于Finsler引理，避免文[64-66]中的保守性。为了更加充分利用时滞信息，受到文[67]中的时滞分解方法的启发，将对时滞区间$[0,h]$的分解结合对$[h,\bar{h}]$的分解。然后，研究具有区间时变时滞的离散广义Markov跳变系统的稳定性问题。采用两种方法对LKF的前向差分中的有限和项进行适当的定界，得到两个新的随机稳定性判据。同时结合正则性和因果性分析，得到两个相应的容许性判据。

在第7章中，研究具有输入时滞的离散T-S模糊系统的鲁棒H_∞控制问题。假设时滞时变且区间有界，应用LMI理论，给出在状态反馈下的模糊控制系统渐近稳定的充分条件。基于改进的SLPM方法，构造求解模糊控制增益的迭代算法。

在第 8 章中，基于时滞系统方法研究网络控制系统分析和综合问题。针对闭环网络控制系统中存在数据包丢失和网络诱导时滞的情况，基于 LKF 方法，运用 LMI 工具，给出一种新的时滞相关稳定性准则。在此基础上通过适当引入不等式进行控制器设计，使得控制增益矩阵可以通过 LMI 直接求解。然后，综合考虑网络中的时滞、丢包和量化问题，结合 LKF 方法和扇区定界方法，提出同时具有量测端量化和执行端量化的网络控制系统控制器设计方法。最后，利用网络控制系统的锯齿形时变时滞特性和控制信号的脉冲特性，提出一种保守性更低的稳定性判据。

1.4 符号说明和引理

本书中，对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}>(\geqslant)\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 正定（半正定）；块对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{\xi}=\mathrm{col}\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$ 表示 $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{B}^{\perp}\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 的右正交补，即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\perp}=0$，且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r$；矩阵中的“$*$”表示对称元素；$\boldsymbol{0}_n$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 分别表示 $n\times n$ 维的零矩阵和单位矩阵，且一般简写为 $\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{I}$；$\boldsymbol{0}_{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维的零矩阵；$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为块元矩阵（block entry matrices），如 $\boldsymbol{e}_2=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{0}_{n\times(p-2)n}]$；在没有引起混淆的情况下，变量 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{x}(s)$ 和 $h(t)$ 等分别简写为 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_s$ 和 $\boldsymbol{h}_t$ 等；简记 $\mathrm{sym}\{\boldsymbol{A}\}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

引理 1.2[68] 给定适维矩阵 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{\Delta}$ 和 $\boldsymbol{F}$，且 $\boldsymbol{\Delta}$ 满足 $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\leqslant I$，则 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}<0$ 等价于存在一个正数 $\varepsilon>0$ 使得 $\boldsymbol{Z}+\varepsilon\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}<0$ 成立。

引理 1.3[69] （S-procedure）对于 $k=0,1,\cdots,N$，设 $\sigma_k:V\to\mathbf{R}$ 是定义在线性向量空间 V 上的实值泛函，则条件 S_2 是条件 S_1 的充分条件。

S_1：对使得 $\sigma_k(\boldsymbol{y})\geqslant 0,k=1,2,\cdots,N$ 的所有 $\boldsymbol{y}\in V$，有 $\sigma_0(\boldsymbol{y})\geqslant 0$；

S_2：存在标量 $\tau_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,N$，使得对任意 $\boldsymbol{y}\in V$，有

$$\sigma_0(\boldsymbol{y}) - \sum_{k=1}^{N} \tau_k \sigma_k(\boldsymbol{y}) \geqslant 0.$$

引理 1.4[69] (Schur 补)对于仿射函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{F}_{22}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{x})$为方阵。以下三个条件相互等价:

(1)$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})<0$;

(2)$\boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{x})<0, \boldsymbol{F}_{22}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_{11}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x})<0$;

(3)$\boldsymbol{F}_{22}(\boldsymbol{x})<0, \boldsymbol{F}_{11}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{x})<0$。

第 2 章　连续时间线性时滞系统稳定性分析

如第 1 章所述，时滞系统稳定性分析存在四种典型简单-LKF 方法：模型变换法、自由权矩阵法、积分不等式法和 Jensen 不等式法。通过分析发现这四种方法存在一定的内在联系，特别是文[42-43]中对定常时滞系统证明了文[34，41，44-50]中稳定性判据的等价性，同时发现引入自由矩阵对减小保守性没有任何意义。但是仍然存在一些未解决之问题，为了解决这些问题，受到文[70]中的关于约束线性系统分析的启发，本章将针对连续时间系统建立一个统一的时滞系统研究框架（一种基于 Finsler 引理的统一观点[71]），将已有的四种方法纳入到这个统一框架下重新考察，发现简单-LKF 方法所具有的独特问题，并探讨解决方案。

时滞系统的简单-LKF 方法研究，分成两个方面：(1)LKF 微分上界的估计，(2)构造新的 LKF。本章建立的统一研究框架实际上是解决第一方面的问题，而在第二方面，本章将基于新建立的统一研究框架，提出改进的三重积分法和时变时滞分解法。

2.1　定常时滞系统稳定性分析

Finsler 引理早在 1937 年就已经提出，但主要用于线性规划等研究领域。直到 1997 年，Skelton 等研究者开始利用 Finsler 引理进行控制系统分析[72]。基本的 Finsler 引理如下：

引理 2.1　(Finsler 引理) 如下四个条件相互等价：

(1)$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{x}<0$，$\forall\, \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{x}\neq 0$；

(2)$\boldsymbol{B}^{\perp^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B}^{\perp}<0$，其中 $\boldsymbol{B}^{\perp}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的任意零空间基矩阵；

(3)存在标量 μ，使得 $\boldsymbol{\Xi}-\mu\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}<0$；

(4)存在矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0$。

其中,$x\in\mathbf{R}^n$ 代表增广状态向量。

当采用 Lyapunov 理论分析连续线性系统稳定性时,条件(1)中的二次不等式 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{x}<0$ 对应于 Lyapunov 泛函的微分负定条件,约束等式 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 对应于系统方程对系统状态演化的约束,即状态 $\boldsymbol{x}$ 只能限定于约束矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的零空间,以下称 $\boldsymbol{B}$ 为约束矩阵;条件(2)对应于将 $\boldsymbol{x}$ 参数化为 $\boldsymbol{B}^{\perp}\boldsymbol{y}$,再代入二次不等式 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{x}<0$;条件(3)和(4)分别对应于求解约束优化问题中常用的标量和矩阵形式的 Lagrange 乘子形式。基于 Finsler 引理处理系统稳定性问题时的一个基本优点是可以根据实际需要灵活选择不同的等价形式,其中条件(2)不引入乘子矩阵,具有最少的求解变量;条件(3)消除了条件(2)中 $\boldsymbol{\Xi}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\perp}$ 之间的耦合,但是存在耦合项 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$;条件(4)进而消除了条件(3)中的耦合项 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$。

考虑如下定常时滞系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d), & \forall\, t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta), & \forall\,\theta\in[-d,0],\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量,$d>0$ 为定常时滞,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_d\in\mathbf{R}^n$ 为定常矩阵,$\boldsymbol{\phi}$ 为初始状态。

下面,基于 Finsler 引理给出系统(2.1)的几种等价稳定性判据。

定理 2.1　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}>0,\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{X}$,以及标量 μ,使得如下条件之一得到满足,则系统(2.1)渐近稳定:

$$\boldsymbol{S}_1^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_1^{\perp}<0,\tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{S}_3^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_3^{\perp}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_4+\boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{S}_5^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_5^{\perp}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_6+\boldsymbol{S}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\Xi}-\mu\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1<0,\tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{S}_3^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_3^{\perp}-\mu\boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_4<0,\tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{S}_5^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_5^{\perp}-\mu\boldsymbol{S}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_6<0,\tag{2.8}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}d^2\boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix},-\boldsymbol{Q},-\boldsymbol{R}\right\},\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},S_2=$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S}_3 = [\boldsymbol{0} \quad -\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{I}], \boldsymbol{S}_4 = [\boldsymbol{I} \quad -\boldsymbol{A} \quad -\boldsymbol{A}_d],$$

$\boldsymbol{S}_5 = [\boldsymbol{I} \quad -\boldsymbol{A} \quad -\boldsymbol{A}_d \quad \boldsymbol{0}], \boldsymbol{S}_6 = [-\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{I}]$。

证明 采用如下广泛使用的 LKF(2.9)：

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \int_{t-d}^{t} \boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_s \mathrm{d}s + d\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}>0, \boldsymbol{R}>0$。计算式(2.9)的微分，可得：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-d) + d^2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}} - d\int_{t-d}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s。 \tag{2.10}$$

使用 Jensen 不等式对式(2.10)的最后一项定界：

$$-d\int_{t-d}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \leqslant -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}, \tag{2.11}$$

其中 $\boldsymbol{w} = \int_{t-d}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t-d)$。故而：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_0, \tag{2.12}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}_0 = \mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(t-d), \boldsymbol{w}\}$。

这样根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，如果

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_1^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_1^{\perp} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t-d) \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t-d) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{2.13}$$

则系统(2.1)稳定。注意到 $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{S}_1^{\perp}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t-d) \end{bmatrix}$，所以等价于：

$$\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_0 < 0, \boldsymbol{\zeta}_0 \neq 0, \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1^{\perp}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t-d) \end{bmatrix} = 0。$$

而 $\boldsymbol{\zeta}_0 \neq 0$ 包含在 $\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_0 < 0$ 中，所以如果在约束 $\forall \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\zeta}_0 = 0$ 下，$\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_0 < 0$，则系统(2.1)渐近稳定。

进而由 Finsler 引理的条件(2)，可得式(2.2)。相似地，采用 $\boldsymbol{\zeta}_1 = \mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(t-d), -\boldsymbol{w}\}$ 和 Finsler 引理的条件(4)，可得式(2.3)。

如果首先采用约束 $\forall \boldsymbol{S}_3\boldsymbol{\zeta}_0 = 0$，则根据 Finsler 引理，如果式(2.14)成立，则系统(2.1)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_3^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{S}_3^{\perp}\boldsymbol{\zeta}_2 < 0, \forall \boldsymbol{S}_4\boldsymbol{\zeta}_2 = 0, \tag{2.14}$$

其中 $\zeta_2=\mathrm{col}\{\dot{x},x,x(t-d)\}$。再对(2.14)利用 Finsler 引理的条件(4)，可得条件(2.4)。

相似地，如果首先采用约束 $\forall S_5\zeta_6=0$，则如果式(2.15)成立，系统(2.1)渐近稳定。

$$\zeta_3^{\mathrm{T}}S_5^{\perp\mathrm{T}}\Xi S_5^{\perp}\zeta_3<0,\forall S_6\zeta_3=0, \tag{2.15}$$

其中 $\zeta_3=\mathrm{col}\{x,x(t-d),w\}$。再利用 Finsler 引理的条件(4)，可得条件(2.5)。

条件(2.6)～(2.8)，可由 Finsler 引理的条件(3)得到。

注 2.1　基于 Finsler 引理，定理 2.1 给出的定常时滞系统的等价稳定性判据，分别对应于 Finsler 引理的条件(2)、(3)和(4)，以及约束矩阵和乘子矩阵的不同选择。实际上，由于约束矩阵还有多种选择，所以等价判据还有更多。定理 2.1 提供了一个定常时滞系统稳定性分析的研究框架，大量已有技术可以融入这一框架，获得等价的(或不等价)的稳定性判据。比如，用其他积分不等式[36]代替 Jensen 不等式，所得结果与定理 2.1 等价；用一些模型变换系统(如中立型变换、广义模型变换等)代替原系统(2.1)，如果模型变换系统与原系统等价(如广义模型变换)，则所得结果也与定理 2.1 等价，否则不等价(如中立型变换)；通过 S-procedure[69]引入一些不等式约束，可参考文[42]中定理 3 的证明。下面的几个推论将具体表明已有文献中的结果只是定理 2.1 的特例。

推论 2.1　如果存在适维矩阵 $P>0$，$Q>0$ 和 $R>0$，使得满足如下 LMI(2.16)，则系统(2.1)渐近稳定：

$$\begin{bmatrix}PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-R & PA_d+R & dA^{\mathrm{T}}R\\ * & -Q-R & dA_d^{\mathrm{T}}R\\ * & * & -R\end{bmatrix}<0。 \tag{2.16}$$

证明　如果 $S_1^{\perp}$ 被选为 $S_1^{\perp}=\begin{bmatrix}A & A_d\\ I & 0\\ 0 & I\\ I & -I\end{bmatrix}$，则式(2.2)变为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(d^2\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(d^2\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}_d+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d+\boldsymbol{R} \\ * & \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(d^2\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}_d-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R} \end{bmatrix}<0。 \tag{2.17}$$

由 Schur 补，式(2.17)等价于式(2.16)。

实际上推论 2.1 就是文[41]中提出的稳定性判据。根据定理 2.1 和注 2.1 得，不论采用何种约束矩阵和乘子变量，不论结合何种等价技术(积分不等式、模型变换、S-procedure)，从 Finsler 引理的角度来看，所得结果都与条件(2.2)等价，且由于条件(2.2)不引入任何乘子变量而最为简单，从而解释了文[43]的结论。

在条件(2.3)中，如果选择 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{M}]$，则式(2.3)等价于 $\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_0<0$ 的两边加上零等式(2.18)(2.19)的两边：

$$2\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}[\dot{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d)]=0, \tag{2.18}$$

$$2\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t-d)-\int_{t-d}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s]=0, \tag{2.19}$$

实际上，在 FWM 法中，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 被称为自由权矩阵，式(2.18)和(2.19)分别对应于系统方程(2.1)和 Leibniz-Newton 公式。如果进一步选择 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_3 & \boldsymbol{N}_3 \\ \boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{T}_2 & \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$，并用矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ 进行合同变换，即可得如下稳定性判据。

推论 2.2 如果存在适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}>0$，$\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3$，$\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$，$\boldsymbol{N}_3$，使得如下 LMI(2.20)成立，则系统(2.1)渐近稳定：

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & -\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}_d-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}+\boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_1 \\ * & -\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}_d-\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_2-\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_2 \\ * & * & d^2\boldsymbol{R}+\boldsymbol{T}_3+\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_3 \\ * & * & * & -\boldsymbol{R} \end{bmatrix}<0, \tag{2.20}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{11}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}$。

推论 2.2 就是文[34]的结果。在一些 FWM 法文献中，仅仅使用

了零等式(2.18)，这意味着 $\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ 中的 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 被保留下来而未被系统方程(2.1)所替换，与之相应的是定理 2.1 中的条件(2.4)。也有文献仅仅使用零等式(2.19)，与之相应的是定理 2.1 中的条件(2.5)。实际上，如果选择 $\boldsymbol{S}_5^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，由式(2.5)将可得如下稳定性判据。

推论 2.3　如果存在适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}>0,\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_3,\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3$，使得如下 LMI(2.21)成立，则系统(2.1)渐近稳定：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{PA}_d-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{N}_1 & d\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & -\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{N}_2 & d\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & * & -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -\boldsymbol{R}\end{bmatrix}<0。\tag{2.21}$$

推论 2.3 就是文[49]的结果。由以上分析可见，FWM 法是定理 2.1 的特例，而自由权矩阵本质上就是 Finsler 引理中的乘子矩阵。

根据第 1 章的讨论，4 种简单 LKF 方法中，自由权矩阵方法和 Jensen 不等式法是代表性方法，积分不等式法是对自由权矩阵方法算法步骤的合并，本质上与自由权矩阵方法等价，而模型变换法是自由权矩阵方法的特例。综合以上推论 2.1～推论 2.3 可知，定理 2.1 构建了一个定常时滞系统稳定性分析的一般性判据，Jensen 不等式法对应于定理 2.1 的条件(2.2)，自由权矩阵方法和积分不等式法对应于定理 2.1 的条件(2.3)～(2.5)，模型变换法对应于将定理 2.1 的条件(2.3)～(2.5)中的乘子矩阵设定为特定值。这样，4 种简单 LKF 方法都可以看成是定理 2.1 的特例，对应于 Finsler 引理的不同条件和乘子矩阵的不同选择。而定理 2.1 中的标量乘子条件(2.6)～(2.8)在已有文献中还未出现过。

另外，从定理 2.1 的证明可以看出，在处理二次型积分项时，Jensen 不等式是一种最有效方法，完全没有必要引入任何自由矩阵。而在

使用 Finsler 引理构建稳定性判据时，可以选择引入或不引入乘子矩阵（自由矩阵），其依据是矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 之间，以及 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 之间，是否存在非线性耦合。并且根据耦合的具体形式，可以选择引入具有不同自由度的乘子矩阵：如果不存在耦合，可以完全不引入；如果完全耦合，必须完全引入，如果部分耦合，可以部分引入。

2.2 时变时滞系统情况

本节将沿着 2.1 节的思路，基于 Finsler 引理，研究如下时变时滞系统的稳定性判据：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h_t), & \forall\, t \geqslant 0,\\ \boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{\phi}(\theta), & \forall\, \theta \in [-\bar{h}, 0],\end{cases} \tag{2.22}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统状态向量；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为初始状态函数；h_t 表示时变时滞，且满足：

$$0 \leqslant h_t \leqslant \bar{h}, \bar{h} > 0, \dot{h}_t \leqslant \mu, \bar{h} > 0, \mu > 0。 \tag{2.23}$$

定理 2.2 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}_1>0, \boldsymbol{Q}_2>0, \boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{X}$，使得式(2.24)或(2.25)对于 h_t 和 $\bar{h}$ 均成立，则系统(2.22)渐近稳定。

$$\boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) + \boldsymbol{S}_8^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t) + \boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_9(h_t) + \boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{2.25}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t) = \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{h}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{e}_2 - (1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_4 - h_t\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_5 - \hat{h}_t\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_6,$$

$$\boldsymbol{S}_7 = [-\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A}_d \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{S}_8(h_t) = \begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & h_t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \hat{h}_t\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_9(h_t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_7\\ \boldsymbol{0}_{2n\times n} \quad \boldsymbol{S}_8(h_t)\end{bmatrix},$$

$\hat{h}_t = \bar{h} - h_t$。

证明 考虑采用 LKF(2.26)：

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \int_{t-h_t}^{t} \boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s \mathrm{d}s + \int_{t-\bar{h}}^{t} \boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_s \mathrm{d}s + \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{2.26}$$

其中 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}_1>0, \boldsymbol{Q}_2>0$ 和 $\boldsymbol{R}>0$。计算式(2.26)的微分，可得：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x} - (1-\dot{h}_t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_t)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t-h_t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\bar{h})\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(t-\bar{h}) + \bar{h}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}} - \int_{t-\bar{h}}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s。 \tag{2.27}$$

由 Jensen 不等式，有：

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \leqslant -h_t\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_1 - \hat{h}_t\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_2, \tag{2.28}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t-h_t))/h_t, \boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{x}(t-h_t)-\boldsymbol{x}(t-\bar{h}))/\hat{h}_t$。当 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$ 时，根据导数定义，分别有

$$\boldsymbol{w}_1(h_t=0) = \lim_{h_t\to 0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t-h_t))/h_t = \dot{\boldsymbol{x}}(t),$$

$$\boldsymbol{w}_2(h_t=\bar{h} = \lim_{h_t\to\bar{h}}(\boldsymbol{x}(t-h_t)-\boldsymbol{x}(t-\bar{h}))/(\bar{H}-h_t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t-\bar{h})。$$

但实际上，在以下证明中 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 在 h_t 或 $\bar{h}$ 处的定义并不影响证明过程。

这样，这样根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，如果式(2.29)或(2.30)成立，则系统(2.22)渐近稳定。

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp}\boldsymbol{\xi}_1 < 0, \forall \boldsymbol{S}_8(h_t)\boldsymbol{\xi}_1 = 0, \tag{2.29}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{\xi}_2 < 0, \forall \boldsymbol{S}_9(h_t)\boldsymbol{\xi}_2 = 0, \tag{2.30}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(t-h_t), \boldsymbol{x}(t-\bar{h}), \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}, \boldsymbol{\xi}_2=\mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\xi}_1\}$。再利用 Finsler 引理，即可得(2.24)和(2.25)。

注 2.2　定理 2.2 给出了时变时滞系统的两种等价的稳定性判据，从中可以看出时变时滞系统与定常时滞系统的本质不同在于，时变时滞 h_t 会不可避免地出现在二次不等式 $\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)$ 和约束矩阵 $\boldsymbol{S}_8(h_t)$ 或 $\boldsymbol{S}_9(h_t)$ 中，这使得必须采用 Finsler 引理的条件(4)引入乘子矩阵进行解耦。否则，如果使用 Finsler 引理的条件(2)，不引入乘子变量，或者使用 Finsler 引理的条件(3)，引入标量乘子变量，所得判据中 h_t 都将以非线性形式出现，即根据 Finsler 引理，式(2.24)和(2.25)等价于

$$\boldsymbol{S}_8^{\perp\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp}\boldsymbol{S}_8^{\perp}(h_t) < 0, \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{S}_9^{\perp^{\mathrm{T}}}(h_t)\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_9^{\perp}(h_t)<0, \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{S}_7^{\perp^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp}-\mu\boldsymbol{S}_8^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{S}_8(h_t)<0, \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)-\mu\boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{S}_9(h_t)<0, \tag{2.34}$$

其中无论 $\boldsymbol{S}_8^{\perp^{\mathrm{T}}}(h_t)$ 和 $\boldsymbol{S}_9^{\perp^{\mathrm{T}}}(h_t)$ 如何选取，都将导致式(2.31)～(2.34)中出现关于 h_t 的非线性项。而对于存在非线性时变参数的矩阵不等式，将无法有效计算其可行性。另一方面，通过引入乘子矩阵变量，可以解除式(2.31)～(2.34)中的耦合，使得时变参数 h_t 线性地出现在式(2.24)和(2.25)中。根据鲁棒稳定性理论[69]，该 LMI 的可行性等价于其在不确定性参数顶点处的可行性，从而最终获得有效检验的 LMI 稳定性判据。总之，定理 2.2 表明为了获得可以有效检验的时变时滞系统稳定性判据，引入乘子变量是必要的。而对定常时滞系统稳定性分析，由于二次不等式和约束矩阵中不存在时变参数，不可能存在耦合，也就没有必要引入乘子变量。由此也可看出，在时变时滞系统的稳定性分析中，时变时滞 h_t 实际上被看作为一个多胞型不确定性参数，这与凸组合方法(convex combination method)[63]在本质上完全相同。

注 2.3 需要注意的是，在对式(2.27)的最后一项定界时，如果忽略一些有用项，可以去除在二次不等式和约束矩阵中的 h_t，从而得到不引入乘子变量的稳定性判据。但这种处理方法必然会放大对式(2.27)最后一项上界的估计，从而增大所得结果的保守性。文[73]、[74]和[75]中分别忽略了不同的有用项，所引入的保守性程度也不同，具体情况是：

在文[73]中，

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-\frac{1}{h}(a_1+a_2),$$

其中 $a_1=\int_{t-h_t}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s$，$a_2=\int_{t-h}^{t-h_t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s$。

在文[74]中，

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant\max\left\{-\frac{1}{h}(a_1+2a_2),-\frac{1}{h}(2a_1+a_2)\right\},$$

在文[75]中，

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant\max\left\{-\frac{1}{h}(a_1+3a_2),-\frac{1}{h}(3a_1+a_2)\right\}。$$

由于 $\max\{-(a_1+3a_2),-(3a_1+a_2)\}\leqslant\max\{-(a_1+2a_2),-(2a_1+a_2)\}\leqslant-(a_1+a_2)$，所以文[73]、文[74]和文[75]的保守性是依次降低的。由于这三种方法在形式上近似，故可统一称为“1-X 定界法”，即“1-1 定界法”[73]，“1-2 定界法”[74]和“1-3 定界法”[75]。虽然文[75]的方法仍然存在较大的保守性，但是已经很难在该思路下改进了。而在基于 Finsler 引理的研究框架下，可以发现时变时滞系统的特殊困难是其中的非线性耦合，只有通过引入乘子矩阵进行解耦才能真正降低保守性。

注 2.4　根据 Finsler 引理，如果将乘子矩阵设置为某种特殊结构，也可能引入保守性。所以，需要特别注意乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的结构选择问题，而已有研究对于该问题很少涉及。以定理 2.2 中条件(2.24)为例，如果采用全参数结构，即乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 采取 $5n\times 2n$ 维的无约束矩阵，将使得式(2.24)中出现零对角元素，而零对角元素的同行、列元素不全为零的情况，这将导致严重的数值计算问题而无法正确求解。为了避免这种情况的发生，目前通用的方法是将乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 中与 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 对应的行设置为全零行。在例 2.1 中将通过数值计算分析这种情况下乘子矩阵结构选择对保守性的影响。另外，文[76]提出当约束矩阵 $\boldsymbol{S}(h_t)$ 存在全零列时，可以设置乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的相应行为全零行，这样既可以避免损失自由度，也可以避免出现数值计算误差。但文[76]提出的这种方法中隐藏着一个问题：由于文[76]的方法需要将乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 设置为 h_t-相关形式，即 $\boldsymbol{X}(h_t)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,h_t/\bar{h}\boldsymbol{X}_4,\hat{h}_t/\bar{h}\boldsymbol{X}_5\}$，其中 $\boldsymbol{X}_i(i=1,\cdots,5)$ 为 $n\times 2n$ 维的无约束矩阵，这将导致条件(2.24)中同时出现 h_t 和 h_t^2，使得条件(2.24)的可行性不再等价于其在 h_t 顶点处的可行性。这时，条件(2.24)实际上是一个关于 h_t 的多项式相关 LMI，由于其求解方法比较复杂，将另文讨论。

在注 2.1 中提到通过 S-procedure 可以引入一些不等式约束，下面将文[77]中从频域提出的一个不等式约束通过 S-procedure 引入到定理 2.2 中，获得一个新的时变时滞系统稳定性判据。

推论 2.4　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0,\boldsymbol{Q}_3>0,\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{X}$，使得式(2.35)或(2.36)对于 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则系统(2.22)渐

近稳定。

$$\boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_8(h_t)+\boldsymbol{S}_8^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{2.35}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_9(h_t)+\boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{2.36}$$

其中 $\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+e_1^{\mathrm{T}}\alpha\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)+(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)$，$a=-(c^2-r^2)\bar{h}^2$，$\beta=c\bar{h}$，$c=0.251$，$r=0.749$。

证明 文[77]中提出

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{w}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{I} & \beta\boldsymbol{I}\\ \beta\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{w}_3\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{2.37}$$

其中 $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t-\bar{h})$。

这样利用 S-procedure，由定理 2.2 可以容易地证得结论。

下面考虑一个在文献中广泛研究的算例，其中使用到计算软件 MATLAB 和 Yalmip[78] 环境下的解算器 SeDuMi[79]。

例 2.1 考虑时变时滞系统(2.22)，参数如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}。$$

表 2.1 中给出对于不同 μ，不同方法所取得的保证该系统渐近稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$。由表 2.1 可以看出，定理 2.2（除 a 和 d 两种情况）比文[73]、[74]和[75]可以取得更大的 $\bar{h}_{\max}$。文[73]、[74]和[75]中都对式(2.27)最后一项上界的估计进行了放大，由于被忽略的有用项不同，所引入的保守性也不同。定理 2.2 由于避免了忽略有用项，具有比文[73]、文[74]和文[75]更低的保守性。另外表 2.1 给出了当定理 2.2 中的乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 取如下一些典型结构时所对应的结果，其中 $\boldsymbol{X}_{kn\times ln}$ 代表 $kn\times ln$ 维的无约束矩阵。

对式(2.24)：

$$(a)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{n\times 2n}\\ \boldsymbol{0}_{4n\times 2n}\end{bmatrix},(b)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{2n\times 2n}\\ \boldsymbol{0}_{3n\times 2n}\end{bmatrix},(c)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{3n\times 2n}\\ \boldsymbol{0}_{2n\times 2n}\end{bmatrix},(d)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{n\times 2n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times 2n}\\ \boldsymbol{X}_{n\times 2n}\\ \boldsymbol{0}_{2n\times 2n}\end{bmatrix};$$

对式(2.25)：

$$(e)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{2n\times 3n}\\ \boldsymbol{0}_{4n\times 3n}\end{bmatrix},f)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{3n\times 3n}\\ \boldsymbol{0}_{3n\times 3n}\end{bmatrix}。$$

表 2.1　对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文[73]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492
文[74]	4.472	3.606	3.043	2.072	1.590
文[75]	4.472	3.607	3.047	2.097	1.678
定理 2.2(a,d)	4.358	3.462	2.864	1.741	0.928
定理 2.2(b,c,e,f)	4.472	3.658	3.163	2.337	1.934
文[28]	4.568	3.673	3.085	2.043	1.492
推论 2.4(e)	5.002	4.000	3.349	2.337	1.934

由表 2.1 可以看出，当 $\boldsymbol{X}$ 采用参数结构(a)和(d)时，会由于自由度的缺失，而导致保守性较大。增加自由度可以降低保守性，特别当 $\boldsymbol{X}$ 采用参数结构(b)和(e)时，可以在保持最小保守性的同时，涉及最少的求解变量。

由表 2.1 可见，在对乘子矩阵都采用相同参数结构的条件下，推论 2.4 取得了比定理 2.2 更大的 $\bar{h}_{\max}$(特别在 μ 较小时)，这体现了由 S-procedure 引入不等式约束(2.37)的作用。作为对比，文[28]基于二次分离法也使用了不等式约束(2.37)，但由表 2.1 可见推论 2.4 对文[28]的结果也有一定的改进。

2.3　鲁棒稳定性分析

本节讨论具有如下两种不确定性的时变时滞系统的鲁棒稳定性分析：

(1)时变结构不确定性系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_d + \Delta\boldsymbol{A}_d(t))\boldsymbol{x}(t-h_t), & \forall t \geqslant 0, \\ \boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{\phi}(\theta), & \forall \theta \in [-\bar{h}, 0], \end{cases} \tag{2.38}$$

其中，时变结构不确定性具有如下形式：

$$[\Delta\boldsymbol{A}(t) \quad \Delta\boldsymbol{A}_d(t)] = \boldsymbol{DF}(t)[\boldsymbol{E}_a \quad \boldsymbol{E}_{ad}], \tag{2.39}$$

这里 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{E}_{ad}$ 为适维常数矩阵，不确定矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}$。

(2)多胞型(polytopic-type)不确定性系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{j=1}^{p} v_j \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{x}(t) + \sum_{j=1}^{p} v_j \boldsymbol{A}_{dj} \boldsymbol{x}(t-h_t), & \forall t \geqslant 0, \\ \boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{\phi}(\theta), & \forall \theta \in [-\bar{h}, 0], \end{cases} \tag{2.40}$$

其中 A_j 和 A_{dj} 为适维常数矩阵，v_j 表示时不变不确定性，并且满足 $\sum_{j=1}^{p} v_j = 1, v_j \geqslant 0$。

下面首先考虑系统(2.38)的鲁棒稳定性，利用定理 2.2 和引理 1.2 可得如下结论。

定理 2.3 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}_1>0, \boldsymbol{Q}_2>0, \boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{X}$，以及标量 $\varepsilon>0$，使得式(2.41)或(2.42)对于 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则对任何容许不确定性(2.39)，系统(2.38)鲁棒稳定。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t) + \boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_9(h_t) + \boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + \varepsilon\bar{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_1 & \boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{D}}_1 \\ * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0, \tag{2.41}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{S}_7^{\perp} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) + \boldsymbol{S}_8^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + \varepsilon\bar{\boldsymbol{E}}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_2 & \boldsymbol{S}_7^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\bar{\boldsymbol{D}}_2 \\ * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0, \tag{2.42}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{D}}_1 = [\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{E}}_1 = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{E}_a \quad \boldsymbol{E}_{ad} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\boldsymbol{D}}_2 = [\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{E}}_2 = [\boldsymbol{E}_a \quad \boldsymbol{E}_{ad} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}。$$

证明 将不确定性(2.39)代入系统(2.38)，由定理 2.2 的条件(2.25)可得系统(2.38)鲁棒稳定的充分条件为：

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_9(h_t)+\boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{D}}_1\boldsymbol{F}_t\bar{\boldsymbol{E}}_1+\bar{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{D}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0。\tag{2.43}$$

由引理 1.2，可得式(2.43)的可行性等价于存在 $\varepsilon>0$，使得式(2.44)成立。

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_9(h_t)+\boldsymbol{S}_9^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{D}}_1\bar{\boldsymbol{D}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\bar{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_1<0,\tag{2.44}$$

再由 Schur 补可得(2.41)。基于式(2.24)，采用相似方法可得式(2.42)。

下面考虑多胞型系统(2.40)的鲁棒稳定性，为此构造参数相关 LKF(2.45)。研究表明，对于多胞型不确定性系统，采用参数相关 LKF 可以有效克服二次型 LKF(2.26)的保守性。

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{p}v_j\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{x}+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{p}v_j\boldsymbol{Q}_{1j}\Big)\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{p}v_j\boldsymbol{Q}_{2j}\Big)\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{0}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{p}v_j\boldsymbol{R}_j\Big)\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\tag{2.45}$$

其中 $\boldsymbol{P}_j>0,\boldsymbol{Q}_{1j}>0,\boldsymbol{Q}_{2j}>0,\boldsymbol{R}_j>0,j=1,\cdots,p$。基于 LKF(2.45)，可得如下结果。

定理 2.4　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_j>0,\boldsymbol{Q}_{1j}>0,\boldsymbol{Q}_{2j}>0,\boldsymbol{R}_j>0$ 和 $\boldsymbol{X}_j$，$j=1,\cdots,p$，使得式(2.46)对于 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则系统(2.40)鲁棒稳定。

$$\boldsymbol{\Xi}_3(h_t,j)+\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{S}_{10}(h_t,j)+\boldsymbol{S}_{10}^{\mathrm{T}}(h_t,j)\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.46}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_3(h_t,j)=\bar{h}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{1j}+\boldsymbol{Q}_{2j})\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1j}\boldsymbol{e}_3-$$
$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2j}\boldsymbol{e}_4-h_t\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{e}_5-\hat{h}_t\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{S}_{10}(h_t,j)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}_j&\boldsymbol{A}_{dj}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&h_t\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\hat{h}_t\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\boldsymbol{X}_j=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_{2j}\quad\boldsymbol{X}_{3j}]。$$

注 2.5　与定理 2.3 不同，对于多胞型不确定性情况，只有基于式(2.25)的结果。这是由于在采用参数相关 LKF 时，必须要求 Lyapunov 矩阵和系统矩阵完全分离。另外，约束矩阵 $\boldsymbol{S}_{10}(h_t,j)$ 决定了定

理 2.4 中的乘子矩阵 $\boldsymbol{X}_j$ 必须设置为式(2.46)中的特殊结构。这是由于 $\boldsymbol{X}_j$ 中的第一列 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_{10}(h_t,j)$的第一行相乘，为了使参数相关矩阵都能分离，$\boldsymbol{X}_1$ 必须与参数无关，而 $\boldsymbol{X}_{2j}$ 和 $\boldsymbol{X}_{3j}$ 则需要与参数相关，以便减小保守性。

2.4 时变时滞系统稳定性判据：改进的三重积分法

已有研究中采用的 LKF 大多只包含一重积分和二重积分，引入三重或更高重积分是否可以获得保守性更小的结果呢？最近，文[51-53]对于三重积分给出了一些初步结果。其中，文[51]针对定常时滞系统，文[52]将文[51]的方法推广到时变时滞情况。但是，文[52]在对 LKF 微分的上界进行估计时，采用的是文[74]中的方法。该方法是对文[73]中方法的改进，但仍然存在由于忽略一些有用项引起的保守性增大问题。文[53]采用了与文[52]不同的 LKF，而在对 LKF 微分上界进行估计时，也引入了较大的保守性。文[51-53]中存在的问题引发了本节的研究。

在得出本节主要结果之前，首先给出如下两个引理。

引理 2.2[75] 对于任意标量 $M\geqslant 0$，$N\geqslant 0$ 和 $0<d<\bar{d}$，有

$$-\frac{1}{d}M-\frac{1}{\bar{d}-d}N\leqslant \max\left\{-\frac{M+3N}{\bar{d}},-\frac{n+3M}{\bar{d}}\right\}。\tag{2.47}$$

引理 2.3[52] 对于任意矩阵 $\boldsymbol{Z}>0$ 和标量 $d>0$，有

$$-d\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\leqslant-\left[\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\left[\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\right],\tag{2.48}$$

$$-\frac{d^2}{2}\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\leqslant-\left[\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]^{\mathrm{T}}\left[\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]。\tag{2.49}$$

下面利用引理 2.2 和引理 2.3，推导系统(2.22)的时滞相关稳定性判据。

定理 2.5 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_i>0$，$\boldsymbol{Z}_j>0$，$\boldsymbol{R}>0$($i=1,2,3$，$j=1,2$)使得式(2.50)～(2.51)成立，则系统(2.22)稳定。

$$\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2<0, \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{\Xi}-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2<0, \tag{2.51}$$

其中

$\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}+\boldsymbol{\Lambda}+\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{A}}-(\bar{h}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\bar{h}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)$，$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{col}\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_5+\boldsymbol{e}_6\}$，$\boldsymbol{Y}=\mathrm{col}\{\hat{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\bar{h}^2\boldsymbol{Z}_2,-(1-\mu)\boldsymbol{Q}_2,-\boldsymbol{Q}_1,-\boldsymbol{Q}_3,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\}$，$\hat{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{A}_d\quad\boldsymbol{0}_{n\times 4n}]$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}_3+\bar{h}^2\boldsymbol{Z}_1+\rho^2\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{\gamma}_1=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)+\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_5$，$\boldsymbol{\gamma}_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_6$，$\rho=\bar{h}^2/2$。

证明　考虑如下 LKF：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x})=&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}+\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\\&\bar{h}\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\bar{h}\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\rho\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{2.52}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}(t-\bar{h}),\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\}$。

沿系统(2.22)对 $V(\boldsymbol{x})$取微分，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=&2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{\zeta}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\bar{h}^2\boldsymbol{Z}_2)\boldsymbol{x}-(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_t)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(t-h_t)-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\bar{h})\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t-\bar{h})-\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-\bar{h})\boldsymbol{Q}_3\dot{\boldsymbol{x}}(t-\bar{h})+\\&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{x}}-\bar{h}\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s-\\&\rho\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{2.53}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 在式(2.50)～(2.51)中定义。

由引理 2.3，有

$$\begin{aligned}&-\rho\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\\leqslant&-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\bar{h}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\bar{h}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)\boldsymbol{\xi},\end{aligned} \tag{2.54}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=\mathrm{col}\left\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}(t-h_t),\boldsymbol{x}(t-\bar{h}),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\bar{h}),\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s,\int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\right\}$。

根据引理 2.2 和引理 2.3，有

$$\boldsymbol{\Theta}=-\bar{h}\int_{t-h_t}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\left[-\frac{h_t}{h_t}\boldsymbol{\gamma}_1-\frac{\bar{h}-h_t}{\bar{h}-ht}\boldsymbol{\gamma}_2\right]\boldsymbol{\xi}$$

$$\leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}[\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2,-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}]\boldsymbol{\xi}, \tag{2.55}$$

将式(2.54)～(2.55)代入(2.53)，整理可得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Xi}+\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2,-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}]\boldsymbol{\xi}, \tag{2.56}$$

这样若式(2.50)～(2.51)成立，则 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$，根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，系统(2.22)渐近稳定。

注 2.6 文[52]中的结果可以重写为：

$$\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-2\boldsymbol{\gamma}_2<0, \tag{2.57}$$

$$\boldsymbol{\Xi}-2\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2<0, \tag{2.58}$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}_1\geqslant 0,\boldsymbol{\gamma}_2\geqslant 0$，可见 $\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2\leqslant\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-2\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\Xi}-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\leqslant\boldsymbol{\Xi}-2\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$。所以定理 2.5 比文[52]的保守性更小。

实际上，文[52]中对式(2.55)中 $\boldsymbol{\Theta}$ 的定界方法与文[74]相同，而文[74]是对文[73]的改进。为了对比，如果使用相同的 LKF(2.52)，而采用文[73]的方法对 $\boldsymbol{\Theta}$ 定界，可得系统稳定性判据如下：

$$\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2<0。 \tag{2.59}$$

同样由于 $\boldsymbol{\gamma}_1\geqslant 0,\boldsymbol{\gamma}_2\geqslant 0$，可得 $\boldsymbol{\Xi}+\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-2\boldsymbol{\gamma}_2,-2\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}\leqslant\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$，所以文[52，74]的定界方法比文[73]的保守性小。

注 2.7 在一些情况下，系统时滞变化率上界是未知的。这时令 $\boldsymbol{Q}_3=0$，可得相应的 μ 未知时滞相关稳定性判据。

为了与文[73]对比，如果不使用三重积分项，而采用如下 LKF(2.60)，并经过与定理 2.5 相似的推导，可得另一个稳定性判据。

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。 \tag{2.60}$$

推论 2.5 若存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0,\boldsymbol{Z}>0$，使得式(2.61)和(2.62)成立，则系统(2.22)稳定。

$$\boldsymbol{\phi}-\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1-3\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2<0, \tag{2.61}$$

$$\boldsymbol{\phi}-3\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1-\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2<0, \tag{2.62}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{11} & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{0}\\ * & -(1-\mu)\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_1\end{bmatrix}+[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}_d\quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}(\bar{h}^2\boldsymbol{Z})[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}_d\quad \boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{\phi}_{11}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2,\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1=[\boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{I}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{I}]。$$

注意到引理 2.2 仅当 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$ 时，式(2.47)中的等号才成立，所以使用该不等式仍然会引入一定的保守性。下面考虑进一步改进该定界方法，给出比定理 2.5 保守性更小的结果。首先定义 $\alpha_1=h_t,\beta_1=\bar{h}-h_t,\alpha_2=h_t^2,\beta_2=\bar{h}^2-h_t^2$。

定理 2.6　如果存在适当维数矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_i>0,\boldsymbol{Z}_j>0,\boldsymbol{R}>0(i=1,2,3,j=1,2)$ 和 $\boldsymbol{X}$ 使得式(2.63)对于 $h_t\in[0,\bar{h}]$ 均成立，则系统(2.22)稳定。

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}(h_t,h_t^2)+\boldsymbol{XS}(h_t,h_t^2)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(h_t,h_t^2)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.63}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}(h_t,h_t^2)=\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PY}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P\Gamma}+\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{\Lambda}},\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}_d\quad \boldsymbol{0}_{10n\times n}],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\Lambda},-\bar{h}\alpha_1\boldsymbol{Z}_1,-\bar{h}\beta_1\boldsymbol{Z}_1,-\bar{h}\alpha_1\boldsymbol{Z}_2,-\bar{h}\beta_1\boldsymbol{Z}_2,-2_t\alpha_2\boldsymbol{R},-2_t\beta_2\boldsymbol{R}\},$$

$$\boldsymbol{S}(h_t,h_t^2)=[\boldsymbol{S}_1(h_t)\quad \boldsymbol{S}_2(h_t,h_t^2)],\boldsymbol{S}_1(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}\\ -\alpha_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\beta_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_2(h_t,h_t^2)=\mathrm{diag}\{\alpha_1\boldsymbol{I},\beta_1\boldsymbol{I},\alpha_1\boldsymbol{I},\beta_1\boldsymbol{I},\alpha_2\boldsymbol{I},\beta_2\boldsymbol{I}\}。$$

证明　证明过程与定理 2.5 类似，但对式(2.54)和(2.55)中的积分项和二重积分项重新进行定界：

$$-\bar{h}\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s$$

$$=-\bar{h}\int_{t-h_t}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-h}^{t-h_t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-$$

$$\bar{h}\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s-\bar{h}\int_{t-h}^{t-h_t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}Z_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s$$

$$\leqslant -\bar{h}\alpha_1 \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{w}_1 - \bar{h}\beta_1 \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{w}_2 - \bar{h}\alpha_1 \boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{w}_3 - \bar{h}\beta_1 \boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{w}_4 - \tag{2.64}$$

$$\rho\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\int_{-h_t}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta - \rho\int_{-\bar{h}}^{-h_t}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant -2\rho\alpha_2 \boldsymbol{w}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_5 - 2\rho\beta_2 \boldsymbol{w}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_6, \tag{2.65}$$

其中

$$\boldsymbol{w}_1 = \int_{t-h_t}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s/h, \boldsymbol{w}_2 = \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s/(\bar{h}-h_t), \boldsymbol{w}_3 = \int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s/h,$$

$$\boldsymbol{w}_4 = \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s/(\bar{h}-h_t), \boldsymbol{w}_5 = \int_{-h_t}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta/\alpha_2 = \left(\alpha_1\boldsymbol{x} - \int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\right)/\alpha_2,$$

$$\boldsymbol{w}_6 = \int_{-\bar{h}}^{-h_t}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta/\beta_2 = \left(\beta_1\boldsymbol{x} - \int_{t-\bar{h}}^{t-h_t}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\right)/\beta_2。$$

这样，根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(h, h_t^2)\boldsymbol{\eta} < 0$，其中 $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_6\}$，则系统(2.22)稳定。同时注意到 $\boldsymbol{w}_i (i = 1, \cdots, 6)$并不是独立变量，通过引入约束 $\boldsymbol{S}(h_t, h_t^2)\boldsymbol{\eta} = 0$，再根据 Finsler 引理，可得结论。

注 2.8 需注意，如果使用文[52]的方法对式(2.54)和(2.55)中的积分项定界，会由于忽略一些有用项，但是可以去除在二次不等式 $\boldsymbol{\Xi}(h_t, h_t^2) < 0$ 和约束矩阵 $\boldsymbol{S}^{\perp}(h_t, h_t^2)$ 中的 h_t，从而根据 Finsler 引理得到无乘子变量的稳定性判据 $\boldsymbol{S}^{\perp\mathrm{T}}(h_t, h_t^2)\boldsymbol{\Xi}(h_t, h_t^2)\boldsymbol{S}^{\perp}(h_t, h_t^2) < 0$。但这种处理方法必然放大对式(2.54)和(2.55)中的积分项和二重积分项上界的估计，从而增大所得结果的保守性。定理 2.6 通过引入乘子变量，消除了其中的耦合，使得 h_t 和 h_t^2 线性地出现在式(2.63)中。进而，根据鲁棒稳定性理论，该 LMI 的可行性等价于其在不确定性参数顶点处的可行性，从而最终获得可以有效检验的 LMI 稳定性判据。

注 2.9 式(2.63)实质上是一个关于 h_t 的多项式 LMI。如果严格地求解式(2.63)，将由于涉及到无穷多个 LMI，而无法求解。为此将其转化为多胞型不确定性 LMI。一种直接的方法是将 h_t 和 h_t^2 看作两个独立的不确定性参数，这样式(2.63)的可行性可以通过在如下四个顶点处判定：$\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(\bar{h},0)$，$\mathrm{C}(\bar{h},\bar{h}^2)$，$\mathrm{D}(0,\bar{h}^2)$。但实际上，顶点

D$(0,\bar{h}^2)$是一个“虚假”顶点，式(2.63)的可行性只须在前 3 个顶点处判定即可。

在定理 2.5 和定理 2.6 中，都只考虑时滞变化率的上界约束 $\dot{h}_t \leqslant \mu$，实际上更合理的假设是 $|\dot{h}_t| \leqslant \mu$(或更一般为 $\mu \leqslant \dot{h}_t \leqslant \mu_2$)。为了充分利用时滞变化率的上下界信息，受到文[53]的启发，将系统(2.22)变换为如下的增广系统模型：

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t) + \bar{\boldsymbol{A}}_d(\dot{h}_t)\boldsymbol{z}(t-h_t), \tag{2.66}$$

其中

$$\boldsymbol{z}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{A}}_d(\dot{h}_t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & (1-\dot{h}_t)\boldsymbol{A}_d\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}。$$

针对增广系统模型(2.66)，考虑如下一个三重积分 LKF：

$$V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} + \int_{t-h_t}^{0}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s + \int_{t-\bar{h}}^{0}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s + \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{0}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta, \tag{2.67}$$

定义 $\boldsymbol{E}_1 = [\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{E}_2 = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{I}]$，则有

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\right] = \frac{\bar{h}^2}{2}\dot{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{z}} - \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_1\ddot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

由引理 2.3，有

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_1\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant -\left[\int_{-h_t}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2}{\alpha_2/2}\left[\int_{-h_t}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]\\
&\quad\left[\int_{-\bar{h}}^{-h_t}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2}{\beta_2/2}\left[\int_{-\bar{h}}^{-h_t}\int_{t+\theta}^{t}\ddot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]\\
&= -2\alpha_2\boldsymbol{\delta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{\delta}_1 - 2\beta_2\boldsymbol{\delta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{\delta}_2,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_1 = [\alpha_1\dot{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}(t-h_t)]/\alpha_2$，$\boldsymbol{\delta}_2 = [\beta_1\dot{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{z}(t-h_t) + \boldsymbol{z}(t-\bar{h})]/\beta_2$。

然后，依照与定理 2.6 相似的过程，可得如下判据。

定理 2.7　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_1>0$，$\boldsymbol{Q}_2>0$，$\boldsymbol{Z}>0$，$\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{X}$ 使得式(2.69)对于 $h_t \in [0,\bar{h}]$，$\dot{h}_t \in [\mu_1,\mu_2]$ 均成立，则系统(2.22)

稳定。

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}(h_t,h_t^2,\dot{h}_t)+\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{S}}(h_t,h_t^2,\dot{h}_t)+\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}(h_t,H^2.t,\dot{h}_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{2.69}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}(h_t,h_t^2,\dot{h}_t)=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}\bar{h}\boldsymbol{R}+\dfrac{\bar{h}^2}{2}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix},-(1-\dot{h}_t)\boldsymbol{Q}_1,-\boldsymbol{Q}_2,-\alpha_1\boldsymbol{R},\right.$$
$$\left.-\beta_1\boldsymbol{R},-2\alpha_2\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2,-2\beta_2\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}_2\right\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}(h_t,H_t^2,\dot{h}_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{E} & \bar{\boldsymbol{A}} & \bar{\boldsymbol{A}}_d(\dot{h}_t) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \alpha_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \beta_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\alpha_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \alpha_2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\beta_1\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \beta_2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}.$$

注 2.10 与注 2.9 类似，式(2.69)的可行性只需在如下 6 个顶点处判定：$(0,0,\mu_1)$，$(\bar{h},0,\mu_1)$，$(\bar{h},\bar{h}^2,\mu_1)$，$(0,0,\mu_2)$，$(\bar{h},0,\mu_2)$，$(\bar{h},\bar{h}^2,\mu_2)$，$(0,0,\mu_2)$。

注 2.11 与文[53]相比，定理 2.7 在对三重积分项的微分(2.68)进行定界时，避免了有忽略用项，使得定理 2.7 具有更小的保守性，这在下面的数值算例中将被验证。

例 2.2 考虑时变时滞系统(2.22)，系数与例 2.1 相同。

表 2.2 对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	未知
文[44]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	0.999
文[35]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345	1.345
文[52]推论 4	4.472	3.606	3.043	2.072	1.590	1.529	1.529
推论 2.5	4.472	3.607	3.047	2.097	1.678	1.657	1.657
文[52]定理 2	4.476	3.611	3.047	2.072	1.590	1.529	1.529
定理 2.5	4.481	3.614	3.052	2.097	1.678	1.657	1.657
定理 2.6	4.602	3.706	3.169	2.337	1.934	1.867	1.867
文[53]定理 3.3	5.120	4.081	3.448	2.528	2.152	1.991	—
定理 2.7	5.300	4.190	3.515	2.721	2.451	2.337	—

对于不同的 μ 和未知 μ，由各种算法取得的保证该系统稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 在表 2.2 中给出。由表 2.2 可以看出，同样使用二重积分 LKF，推论 2.5 可以得到更大的 $\bar{h}_{\max}$。采用相同的三重积分 LKF，定理 2.5、定理 2.6 和定理 2.7 分别改进了文[52]定理 2 和文[53]的定理 3.3 的结果，特别是定理 2.7 由于充分利用了时滞变化率的上下界信息，具有最小的保守性。

2.5　改进的时变时滞分解法

对于定常时滞系统，时滞分解法可以有效减小稳定性判据的保守性。该方法通过构造新的 LKF，可以更加充分地利用时滞信息。文[67]通过数值算例表明：随着增加时滞分解数目 N，可以不断降低稳定性判据的保守性，并且当 N 足够大时，甚至可以逼近解析解。相似地，时滞分解的思想也被用于时变时滞系统，为了与定常时滞系统区别，称其为时变时滞分解法。下面，基于 Finsler 引理，对于目前存在的两种时变时滞分解法分别进行改进，并通过数值计算比较两种方法。

2.5.1　时变时滞分解法一：分段分析法

文[80]中提出了一种时变时滞分解法，该方法的主要思想是：将时变时滞的变化区间均匀分成 N 个子区间。然后，按照时变时滞存在于某个子区间的情况，分成 N 种情况分别予以分析。该方法结合了定常时滞系统和时变时滞系统的不同处理方法，可以保证通过不断细分，逐步减小稳定性判据的保守性。本节基于文[80]的分段分析思想，在 Finsler 引理的框架下，建立新的稳定性判据。并且，通过构造新的 LKF，使新的稳定性判据不仅是时滞相关的，而且是时滞变化率相关的，从而可以更加充分地利用时滞信息。为了表述方便，令 $\rho=\bar{h}/2$。

定理 2.8　系统(2.22)渐近稳定的充分条件为：存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_1>0$，$\boldsymbol{Q}_2>0$，$\boldsymbol{Z}_1>0$，$\boldsymbol{Z}_2>0$ 和 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，使得 LMIs(2.70)对于 $h_t=0$ 和 ρ，LMIs(2.71)对于 $h_t=\rho$ 和 $\bar{h}$ 均成立。

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}_1(h_t)+\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}<0, \tag{2.70}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}_2(h_t)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}<0, \tag{2.71}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_0-[\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5]^{\mathrm{T}}\rho^{-1}\boldsymbol{Z}_2[\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5]-h_t\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_6-(\rho-h_t)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_7,$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_0-[\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4]^{\mathrm{T}}\rho^{-1}\boldsymbol{Z}_1[\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4]-(h_t-\rho)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_6-(h-h_t)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_7,$$

$$\boldsymbol{\Xi}_0=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\rho(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2-$$
$$(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_1(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & h_t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\rho-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_2(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h_t-\rho)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

证明 考虑如下 LKF：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho}\end{bmatrix}\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-\rho}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\bar{h}}^{-\rho}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{2.72}$$

沿系统(2.22)，对 $V(\boldsymbol{x})$ 取微分，有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}-(1-\mu)\boldsymbol{x}_{t-h_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_{t-h_t}+$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_{t-\rho}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_{t-\rho}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\rho}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\rho}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}\end{bmatrix}+$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\rho(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2)\dot{\boldsymbol{x}}-\int_{t-\rho}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\int_{t-\bar{h}}^{t-\rho}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s, \tag{2.73}$$

下面根据 h_t 的大小，分两种情况进行讨论：

(1) 当 $0\leqslant h_t\leqslant\rho$ 时，由 Jensen 不等式，有

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t-\rho}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{x}_{t-\rho}-\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}})^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\rho}(\boldsymbol{x}_{t-\rho}-\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}), \tag{2.74}$$

$$-\int_{t-\rho}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-h_t\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{z}_1-(\rho-h_t)\boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{z}_2, \tag{2.75}$$

其中 $\boldsymbol{z}_1=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-h_t})/h_t$，$\boldsymbol{z}_2=(\boldsymbol{x}_{t-h_t}-\boldsymbol{x}_{t-\rho})/(\rho-h_t)$。

这样，系统(2.22)渐近稳定的充分条件为：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{\xi}_1 < 0, \forall \boldsymbol{S}_1(h(t))\boldsymbol{\xi}_1(t) = 0, \quad (2.76)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{t-h_t}, \boldsymbol{x}_{t-\rho}, \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2\}$。

再利用 Finsler 引理，即可得条件(2.70)。

(2) 当 $\rho \leqslant h_t \leqslant \bar{h}$ 时，有

$$-\int_{t-\rho}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \leqslant -[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{t-\rho}]^{\mathrm{T}} \frac{\boldsymbol{Z}_1}{\rho}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{t-\rho}], \quad (2.77)$$

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t-\rho} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \leqslant -(h_t - \rho)\boldsymbol{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{z}_3 - (\bar{h} - h_t)\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{z}_4, \quad (2.78)$$

其中

$$\boldsymbol{z}_3 = (\boldsymbol{x}_{t-\rho} - \boldsymbol{x}_{t-h_t})/(h_t - \rho), \boldsymbol{z}_4 = (\boldsymbol{x}_{t-h_t} - \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}})/(\bar{h} - h_t)。$$

这样，系统(2.22)渐近稳定的充分条件为：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)\boldsymbol{\xi}_2 < 0, \forall \boldsymbol{S}_2(h)\boldsymbol{\xi}_2 = 0, \quad (2.79)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{t-h_t}, \boldsymbol{x}_{t-\rho}, \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}, \boldsymbol{z}_3, \boldsymbol{z}_4\}$。再利用 Finsler 引理，即可得条件(2.71)。

综合以上两种情况，对于 $t>0$，均有 $\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})<0$，即可以保证系统(2.22)的绝对稳定性。

注 2.12　定理 2.8 中所使用的 LKF(2.72)，将系统时变时滞 $0 \leqslant h_t \leqslant \bar{h}$ 分解成相等的两个区间，并分别设定了不同的 Lyapunov 矩阵 $\boldsymbol{Z}_i$ $(i=1,2)$。另外，式(2.72)中第 3 项包含了不同区间的交叉信息，也有利于减少所得判据的保守性。2.5.3 节的数值算例将具体表明定理 2.8 对文[80]的改进。

注 2.13　定理 2.8 中所使用的时滞分解的方法，可以进一步推广到分解区间数目大于 2 的情况，但随着分解区间数目的增加，所涉及的 LMI 的维数也将增长，计算负担将增大。并且随着分解区间数目的增加，时滞分解所带来的减小保守性的效果将逐步减弱。一般而言，分解区间数目不会大于 4。下面将定理 2.8 中所使用的时滞分解的方法，进一步推广到分解区间数目 3 的情况。

考虑如下 LKF，有如下结论：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho_2}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho_2}\\ \boldsymbol{x}_{s-2\rho_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho_2}\\ \boldsymbol{x}_{s-2\rho_2}\end{bmatrix}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{-\rho_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-2\rho_2}^{-\rho_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\bar{h}}^{-2\rho_2}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\rho_2=\bar{h}/3$。

推论 2.6 系统(2.22)渐近稳定的充分条件为：存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0,\boldsymbol{Z}_1>0,\boldsymbol{Z}_2>0$ 和 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$，使得 LMIs(2.80)对于 $h_t=0$ 和 ρ_2，LMIs(2.81)对于 $h_t=\rho_2$ 和 $2\rho_2$，LMIs(2.82)对于 $h_t=2\rho_2$ 和 $\bar{h}$，均成立。

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}_1(h_t)+\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.80}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}_2(h_t)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.81}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_3(h_t)+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{S}_3(h_t)+\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_3^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.82}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_0=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}_2(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{Z}_3)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2-$$

$$(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_0-(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)-$$
$$h_t\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_7-(\rho_2-h_t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_8,$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_0-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)-(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)-$$
$$(h_t-\rho_2)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_7-(2\rho_2-h_t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_8,$$

$$\boldsymbol{\Xi}_3(h_t)=\boldsymbol{\Xi}_0-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)-(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\rho_2^{-1}\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-$$
$$(h_t-2\rho_2)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{e}_7-(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{e}_8,$$

$$\boldsymbol{S}_1(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & h_t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\rho_2-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_2(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (h_t-\rho_2)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (2\rho_2-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_3(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h_t-2\rho_2)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

2.5.2　时变时滞分解法二：状态增广法

相似于定常时滞系统，在文[81]中时滞分解的思想也被用于时变时滞系统，可称其为时变时滞分解法。下面，在基于 Finsler 引理的统一分析框架下，基于文[81]的时变时滞分解思想，提出一种改进的时变时滞系统稳定性判据。

引理 2.4[81]　定义函数 $D(t)=t-h(t)/N$，其中 N 为大于 2 的正整数。则对于算子 $\nabla(\boldsymbol{x}_t)=\int_{t-h(t)}^{D^N(t)}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s$，有 $\|\nabla\boldsymbol{x}_t)\|\leqslant\frac{\bar{h}\mu(N-1)}{2N}\sqrt{\frac{1}{1-\mu}}\|\boldsymbol{x}_t\|$，其中 $\|\cdot\|$ 为 2-范数。

定理 2.9　如果存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_4,\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3\in\mathbf{R}^{2n}$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{13n\times 5n}$ 使得对于 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$，式(2.83)成立，则系统(2.22)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Psi}(h_t)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}(h_t)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.83}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}(h_t)=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_5+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}-(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-h_t(\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_8+2\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_{10})-(\bar{h}-h_t)(\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_9+2\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_{11}),$$

$$\boldsymbol{U}=\left(\frac{\bar{h}\mu}{4}\right)\frac{1}{1-\mu}\boldsymbol{Q}_4+\bar{h}\boldsymbol{R}_1+\frac{\bar{h}}{2}\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{S}(h_t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12}\\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{11}=[-\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{0}_{n\times 2n}\quad\boldsymbol{A}_d\quad\boldsymbol{0}_{n\times 2n}],\boldsymbol{S}_{12}=\boldsymbol{0}_{n\times 4n},$$

$$\boldsymbol{S}_{21}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{22}=\operatorname{diag}\{h_t\boldsymbol{I},(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I},h_t\boldsymbol{I},(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I}\}。$$

证明 考虑如下 LKF：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\frac{\bar{h}}{2}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+$$

$$\int_{t-\frac{h_t}{2}}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\frac{h_s}{2}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\frac{h_s}{2}}\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\int_{t-\frac{h_s}{2}}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\frac{h_s}{2}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\frac{h_s}{2}}\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

和积分二次约束(IQC)：

$$\prod(\boldsymbol{x})=\int_0^t\left[\left(\frac{\bar{h}\mu}{4}\right)\frac{1}{1-\mu}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{x}}_s-\nabla^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{x}}_s)\boldsymbol{Q}_4\nabla(\dot{\boldsymbol{x}}_s)\right]\mathrm{d}s.\tag{2.85}$$

可以证明$\prod(x)$是正定函数[81]。进而，沿系统(2.22)对式(2.84)取微分，有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}-(1-\dot{h}_t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_t)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t-h_t)+$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_1\end{bmatrix}-\left(1-\frac{\dot{h}_t}{2}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}/2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}/2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}/2}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}/2}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}\end{bmatrix}+$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{h}\boldsymbol{R}_1+\frac{\bar{h}}{2}\boldsymbol{R}_2\right)\dot{\boldsymbol{x}}-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\int_{t-\frac{\bar{h}}{2}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s,\tag{2.86}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(t-h_t/2)$，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1(t-h_t/2)$。

由 Jensen 不等式，有

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\int_{t-\frac{\bar{h}}{2}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s$$

$$\leqslant-h_t(\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_1)-(\bar{h}-h_t)(\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_2),\tag{2.87}$$

其中 $\boldsymbol{v}_1=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-h_t})/h_t$，$\boldsymbol{v}_2=(\boldsymbol{x}_{t-h_t}-\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}})/(\bar{h}-h_t)$，$\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-h_t/2})/h_t$，$\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{x}_{t-h_t/2}-\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}/2})/(\bar{h}-h_t)$。

根据 Scaled 小增益定理[10]和积分二次约束(2.85)，如果 $W(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\dot{V}+\left(\frac{\bar{h}\mu}{4}\right)\frac{1}{1-\mu}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{x}}-\nabla^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{Q}_4\nabla(\dot{\boldsymbol{x}})<0$，则系统(2.22)渐近稳定。

另外，定义 $\xi=\mathrm{col}\{\dot{x},x,x_1,x_2,x_{t-h_t},x_{t-\bar{h}/2},x_{t-\bar{h}},v_1,v_2,w_1,w_2\}$，由(2.86)，有 $W(x,\dot{x})<\xi^{\mathrm{T}}\Psi(h_t)\xi$，其中 $\Psi(h_t)$ 在式(2.83)中定义。考虑到 ξ 中各个变量之间的相关性，引入等式约束 $S(h_t)\xi=0$，其中 $S(h_t)$ 在式(2.83)中定义。再由 Finsler 引理，即可得证。

注 2.14　在定理 2.9 的证明中，时变时滞状态 x_{t-h_t} 被 2-分解为 x_1 和 x_2，从而引入更多的时变时滞信息以减小稳定性判据的保守性，其中 x_1 表示分解后的时滞状态，x_2 表示由 x_1 重构的时滞状态。在基本思想上，时变时滞分解法与已有的定常时滞分解法[67]是相同的，但是两者也有重要的差别：对于定常时滞，重构时滞状态 x_2 可以严格地恢复原时滞状态 x_{t-h_t}；而对于时变时滞，x_2 和 x_{t-h_t} 两者将不相等，这增加了处理问题的难度。本节受文[81]的启发，通过引入积分二次约束(2.85)，将 x_2 和 x_{t-h_t} 之间的误差表示为系统不确定性，进而基于 Scaled 小增益定理进行系统稳定性分析。但与文[81]不同的是，定理 2.9 利用 Finsler 引理将稳定性判据表示为含有时变参数的 LMI(4)，从而避免了在估计式(2.86)中最后两项的上界时，由于忽略了一些有用项所引入的保守性。

下面，进一步将定理 2.9 推广到 N-分解情况。为此考虑如下 LKF：

$$\begin{aligned}V(x)=&x^{\mathrm{T}}Px+\int_{t-h_t}^{t}x_s^{\mathrm{T}}Q_1x_s\mathrm{d}s+\int_{t-\frac{h_t}{N}}^{t}\Psi_{1s}^{\mathrm{T}}Q_2\Psi_{1s}\mathrm{d}s+\\&\int_{t-\frac{\bar{h}}{N}}^{t}\Psi_{2s}^{\mathrm{T}}Q_3\Psi_{2s}\mathrm{d}s+\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R_1\dot{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\int_{t-\frac{\bar{h}}{N}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R_2\dot{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned}\tag{2.88}$$

和积分二次约束：

$$\Pi(x)=\int_0^t\left[\left(\frac{\bar{h}\mu(N-1)}{2N}\right)^2\frac{1}{1-\mu}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}Q_4\dot{x}_s-\nabla^{\mathrm{T}}(\dot{x}_s)Q_4\nabla(\dot{x}_s)\right]\mathrm{d}s,$$

其中 $\psi_{1s}=\mathrm{col}\{x_s,x_{1s},\cdots,x_{n-2,s}\}$，$\psi_{2s}=\mathrm{col}\{x_s,x_{s-\bar{h}/N},\cdots,x_{s-(N-1)\bar{h}/N}\}$，$x_1=x(D^{\prime}(t))$。

相似于定理 2.9 的证明，可得如下结果。

推论 2.7　对于系统(2.22)，如果存在适维正定矩阵 P,Q_1,Q_1，

$\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3\in\mathbf{R}^{Nn}$，和矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{(2N+9)n\times 5n}$，使得式(2.90)对于 $h_t=0$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则系统(2.22)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Xi}(h_t)=\bar{\boldsymbol{\Psi}}(h_t)+\boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{S}}(h_t)+\bar{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{2.90}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{\Psi}}(h_t)\\&=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Z}_1)\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_{N+3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_{N+3}+\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{N+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{N+1}\end{bmatrix}-\left(1-\frac{\mu}{N}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_3\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{N+2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_3\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{N+2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_{N+4}\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{2N+2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_{N+4}\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{2N+2}\end{bmatrix}-\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{N+4}\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{2N+3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{N+4}\\\vdots\\\boldsymbol{e}_{2N+3}\end{bmatrix}-\\&(\boldsymbol{e}_{N+2}-\boldsymbol{e}_{N+3})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4(\boldsymbol{e}_{N+2}-\boldsymbol{e}_{N+3})-(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-\\&h_t(\boldsymbol{e}_{2N+4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_{2N+4}+N\boldsymbol{e}_{2N+6}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_{2N+6})-(\bar{h}-h_t)(\boldsymbol{e}_{2N+5}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_{2N+5}+N\boldsymbol{e}_{2N+7}^{\mathrm{T}}R_2\boldsymbol{e}_{2N+7}),\end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}(h_t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{S}}_{11}&\boldsymbol{S}_{12}\\\bar{\boldsymbol{S}}_{21}&\boldsymbol{S}_{22}\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{S}}_{11}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}_{n\times Nn}&\boldsymbol{A}_d&\boldsymbol{0}_{n\times Nn}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}_{21}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}_{n\times(N-1)n}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}=\left(\frac{\bar{h}\mu(N-1)}{2N}\right)\frac{1}{1-\mu}\boldsymbol{Q}_4+\bar{h}\boldsymbol{R}_1+\frac{\bar{h}}{N}\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{Z}_2,$$

其中，$\boldsymbol{X}_{12},\boldsymbol{S}_{22}$ 等矩阵在式(2.83)中定义。

2.5.3 数值算例和比较研究

例 2.3 考虑时变时滞系统(2.22)，系数为与例 2.1 相同。为了便于比较，在表 2.3 中给出对于不同 μ，保证该系统渐近稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$。由表 2.3 可以看出，本节提出的方法比文[80]和[81]可以取得更大的 $\bar{h}_{\max}$。

表 2.3　对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文[35]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492
文[73]	4.472	3.606	3.043	2.072	1.590
文[75]	4.472	3.607	3.047	2.097	1.678
文[80]，$N=2$	1.98	—	—	—	—
文[80]，$N=3$	2.07	—	—	—	—
定理 2.2	4.472	3.658	3.163	2.337	1.934
定理 2.8，$N=2$	5.360	4.274	3.569	2.410	2.118
推论 2.6，$N=3$	5.535	4.402	3.669	2.448	2.206
文[81]，$N=2$	5.717	4.286	3.366	2.008	1.364
文[81]，$N=4$	5.967	4.374	3.349	2.008	1.364
文[81]，$N=6$	6.120	4.396	3.321	2.008	1.364
推论 2.7，$N=2$	5.717	4.287	3.378	2.337	1.934
推论 2.7，$N=4$	6.055	4.393	3.349	3.336	1.934
推论 2.7，$N=6$	6.120	4.395	3.321	2.336	1.934

第 3 章　离散时间线性时滞系统稳定性分析

在第 2 章，详细讨论了连续时间时滞系统的稳定性分析问题。而近年来，随着对网络控制系统等的研究[82-83]，越来越多的学者开始关注区间时变时滞离散系统的稳定性分析问题[39, 56, 84-89]：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k-d(k)), \\ \boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k), k=-h_2,-h_2+1,\cdots,0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $x(k)\in R^n$ 是系统的状态向量；$d(k)$ 为区间时变时滞，满足 $0\leqslant h_1\leqslant d(k)\leqslant h_2$，其中 h_1 和 h_2 为已知非负整数。为了简化叙述，记 $d(k)$ 为 d_k，$x(k)$ 为 x_k，$y(k)=x(k+1)-x(k)$。

已有的研究方法可以分为：(1) Moon 不等式法[84, 88]。这类方法被最早使用，需要进行模型变换，保守性较大。(2) 自由矩阵法[56, 85, 87]。这类方法通过恒零等式引入自由变量矩阵，可以取得比文[84]更优的结果。(3) 有限和不等式(finite sum inequality)法[39]。(4) Jensen 不等式法[86, 89]。但是文[39, 86, 89]中都存在“过度定界”(the over bounding)问题，这导致所得结果具有一定的保守性。文 [39] 中 $-\sum_{j=k-d_M}^{k-1}(\cdot)$ 被放大为 $-\sum_{j=k-d_k}^{k-1}(\cdot)$，文[86] 中 $-\sum_{j=d_{av}-\delta}^{d_{av}+\delta}(\cdot)$ 被放大为 $-\sum_{j=d_{av}+1}^{d_k}(\cdot)$，文[89] 中 $-(d_M-d_m)/(d_k-d_m)$ 和 $-(d_M-d_m)/(d_M-d_k)$ 被放大为 -1，其中 $d_m\leqslant d_k\leqslant d_M$，$d_{av}=(d_m+d_M)/2$，$\delta=(d_M-d_m)/2$。文[56]提出了一种新的自由权矩阵方法，可以避免文[39, 86, 89]中存在的“过度定界”问题，也具有更小的保守性，但是文[56]中引入了一些不必要的自由变量。最近，同样基于自由权矩阵方法，文[90]提出了两个保守性更小，计算量更少的稳定性判据。

本章首先基于“1-X”定界法、Finsler 引理法和反凸函数法[91]提出一些改进的稳定性判据，并进行数值比较分析，然后尝试证明三种方法

之间的严格数学关系。

3.1　稳定性分析之一："1-X"定界法

"1-X"定界法包括："1-1"定界法、"1-2"定界法和"1-3"定界法。

引理 3.1[86]　(离散时间 Jensen 不等式)向量函数 $\boldsymbol{x}_i:[-h_2,0]\to\mathbf{R}^n$，则对于任意矩阵 $0<\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^n$，有

$$(h_2-h_1+1)\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_i\geqslant\Big(\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{M}\Big(\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_i\Big)。\tag{3.2}$$

在得出本节主要结果之前，首先给出如下引理。该引理是引理 2.2 在区间时变情况的推广。

引理 3.2[92]　对于任意标量 $M\geqslant 0$，$N\geqslant 0$ 和 $d_m<d<d_M$，有

$$-\frac{d_M-d_m}{d-d_m}M-\frac{d_M-d_m}{d_M-d}N\leqslant\max\{-(M+3N),-(N+3M)\}。\tag{3.3}$$

证明　假设 $M\geqslant N\geqslant 0$，则有

$$\begin{aligned}&(d_M-d_m)(d_M-d)M+(d_M-d_m)(d-d_m)N-(d_M-d)(d-d_m)(M+3N)\\&=[(d_M-d_m)+(d_m-d)](d_M-d)M-2(d_M-d)(d-d_m)N+\\&\quad[(d_M-d_m)-(d_M-d)](d-d_m)N\\&=(d_M-d)^2M+2(d_M-d)(d_m-d)N+(d-d_m)^2N\\&\quad\geqslant(d_M-d)^2N+2(d_M-d)(d_m-d)N+(d_m-d)^2N\\&=(d_M+d_m-2d)^2N\geqslant 0。\end{aligned}$$

进而有

$$\frac{1}{d-d_m}M+\frac{1}{d_M-d}N\geqslant\frac{M+3N}{d_M-d_m}=\min\left\{\frac{M+3N}{d_M-d_m},\frac{N+3M}{d_M-d_m}\right\},$$

当 $N\geqslant M\geqslant 0$ 时，可以相似地得到不等式(3.3)成立。

利用引理 3.1 和引理 3.2，可得如下结果。

定理 3.1　如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_l>0$，$\boldsymbol{R}_l>0(l=1,2)$，使得 LMIs (3.4)或(3.5)或(3.6)之一成立，则系统(3.1)渐近稳定

$$\boldsymbol{\Xi}_0-\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2<0,\tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Xi}_0 - \boldsymbol{Y}_1 - 2\boldsymbol{Y}_2 < 0, \\ \boldsymbol{\Xi}_0 - 2\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2 < 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Xi}_0 - \boldsymbol{Y}_1 - 3\boldsymbol{Y}_2 < 0, \\ \boldsymbol{\Xi}_0 - 3\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2 < 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

则系统(3.1)渐近稳定,其中

$$\boldsymbol{\Xi}_0 = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2] + \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_4 - (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) + [(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2]^{\mathrm{T}}(h_1^2\boldsymbol{R}_1 + h_{12}^2\boldsymbol{R}_2)[(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2],$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = (\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{Y}_2 = (\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4), h_{12} = h_2 - h_1。$$

证明 考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.7):

$$V(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_k + \sum_{i=k-h_1}^{k-1}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_i + \sum_{i=k-h_2}^{k-1}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_i + \sum_{\theta=-h_1+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}h_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_j + \sum_{\theta=-h_2+1}^{-h_1}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}h_{12}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j \tag{3.7}$$

计算 $V(\boldsymbol{x}_k)$ 的前向差分,有

$$\begin{aligned}\Delta V(\boldsymbol{x}_k) &= V(\boldsymbol{x}_{k+1}) - V(\boldsymbol{x}_k) \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}_{k-d_k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}_{k-d_k}) - \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_k + \sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_k - \\ &\quad \sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{x}_{k-h_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_{k-h_i} + \\ &\quad \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}(h_1^2\boldsymbol{R}_1 + h_{12}^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{y}_k - \sum_{j=k-h_1}^{k-1}h_1\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_j - \sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}h_{12}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j,\end{aligned}$$

根据引理 3.1,有

$$-h_1\sum_{j=k-h_1}^{k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_j \leqslant \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{x}_{k-h_1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_1 & -\boldsymbol{R}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{x}_{k-h_1}\end{bmatrix}。 \tag{3.9}$$

记 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{x}_{k-h_1} - \boldsymbol{x}_{k-d_k}$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{x}_{k-d_k} - \boldsymbol{x}_{k-h_2}$。直接由 Jensen 不等式,采用"1-1"定界法,可得

$$-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j = -h_{12}\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$\leqslant -(d_k - h_1)\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - (h_2 - d_k)\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$\leqslant -\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2, \tag{3.10}$$

采用“1-2”定界法，可得

$$-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j = -h_{12}\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$= -(d_k - h_1)\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - (h_2 - d_k)\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j -$$

$$(h_2 - d_k)\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - (d_k - h_1)\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$\leqslant -\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2 - \frac{h_2 - d_k}{d_k - h_1}\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1$$

$$-\frac{d_k - h_1}{h_2 - d_k}\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2$$

$$\leqslant \max\{-\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - 2\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2, -2\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2\}, \tag{3.11}$$

由引理 3.2，采用“1-3”定界法，可得

$$-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j = -h_{12}\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$\leqslant -\frac{h_{12}}{d_k - h_1}\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - \frac{h_{12}}{h_2 - d_k}\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2$$

$$\leqslant \max\{-\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - 3\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2, -3\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{\gamma}_2\}。$$

令 $\boldsymbol{\xi}_k = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k-d_k}, \boldsymbol{x}_{k-h_1}, \boldsymbol{x}_{k-h_2}\}$，综合式(3.8) ～ (3.12)，可得

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k) \leqslant \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Xi}_0 - \boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2)\boldsymbol{\xi}_k, \tag{3.13}$$

或

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k) \leqslant \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_0\boldsymbol{\xi}_k + \max\{\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Y}_1 - 2\boldsymbol{Y}_2)\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(-2\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{Y}_1)\boldsymbol{\xi}_k\}, \tag{3.14}$$

或

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k) \leqslant \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_0\boldsymbol{\xi}_k + \max\{\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Y}_1 - 3\boldsymbol{Y}_2)\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(-3\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{Y}_1)\boldsymbol{\xi}_k\}, \tag{3.15}$$

这样，如果式(3.4)或(3.5)或(3.6)成立，则系统(3.1)渐近稳定。

注 3.1 式(3.7)中所采用的 Lyapunov 泛函不同于文[90]。实际上我们发现 $\sum_{j=k-d_k}^{k-1} \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_3 \boldsymbol{x}_j$ 和 $\sum_{\theta=-d_M+1}^{-d_m+1} \sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_3 \boldsymbol{x}_j$ 不能减小保守性，所以未采用这两项。

3.2 稳定性分析之二：Finsler 引理方法

本节利用第 2 章处理连续时间系统时建立的基于 Finsler 引理的时滞系统稳定性分析框架，处理离散时间情况，获得保守性更小的稳定性判据。

定理 3.2 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}_l>0, \boldsymbol{R}_l>0(l=1,2)$ 和 $\boldsymbol{X}$，使得式(3.16)成立，则系统(3.1)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Xi}(d_k)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}(d_k)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(d_k)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}(d_k)=&(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2)+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{P})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_4-\\&(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)-h_{12}(d_k-h_1)\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_5-h_{12}(h_2-d_k)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_6-\\&[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2]+[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2]^{\mathrm{T}}(h_1^2\boldsymbol{R}_1+h_{12}^2\boldsymbol{R}_2),\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}(d_k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (d_k-h_1)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h_2-d_k)\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

证明 采用与定理 3.1 相同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.7)，计算可得前向微分(3.8)，对式(3.8)倒数第二项采用定界(3.9)，而对式(3.8)倒数第一项采用如下定界：

$$\begin{aligned}-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j=&-h_{12}\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j\\ \leqslant&-h_{12}(d_k-h_1)\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_1-h_{12}(h_2-d_k)\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_2\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{x}_{k-h_1}-\boldsymbol{x}_{k-d_k})/(d_k-h_1)$，$\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{x}_{k-d_k}-\boldsymbol{x}_{k-h_2})/(h_2-d_k)$。

这样，根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，如果

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k)\leqslant\boldsymbol{\zeta}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(d_k)\boldsymbol{\zeta}_k<0,\ \forall\ \boldsymbol{S}(d_k)\boldsymbol{\zeta}_k=0,$$

则系统(3.1)渐近稳定，其中 $\boldsymbol{\zeta}_k=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k-d_k},\boldsymbol{x}_{k-h_1},\boldsymbol{x}_{k-h_2},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$。再

利用 Finsler 引理，可得结论。

注 3.2　类似于推论 2.3，可以证明在离散时间情况下，自由权矩阵方法和有限和不等式方法都是 Finsler 引理框架的特例。特别地，通过设置乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 为特定的结构可以直接获得一些已有的结果，例如文献[56]中结果。

3.3　稳定性分析之三：反凸函数法

本节采用文[91]中提出的反凸函数法处理稳定性分析问题，该方法可以取得比 Finsler 引理方法更少的计算量。首先介绍如下引理。

引理 3.3[91]　如果存在任意向量 $\boldsymbol{\zeta}_1$、$\boldsymbol{\zeta}_2$，矩阵 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 和实数 $\alpha_1 \geqslant 0$，$\alpha_2 \geqslant 0$ 满足：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \boldsymbol{\zeta}_i = \boldsymbol{0}\ if\ \alpha_i = 0 (i = 1,2),$$

则有

$$-\frac{1}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\zeta}_1 - \frac{1}{\alpha_2}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\zeta}_2 \leqslant -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1 \\ \boldsymbol{\zeta}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1 \\ \boldsymbol{\zeta}_2 \end{bmatrix}.$$

定理 3.3　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_l>0$，$\boldsymbol{R}_l>0(l=1,2)$ 和 $\boldsymbol{S}$，使得式(3.18)成立，则系统(3.1)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} > 0 \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_1 = \boldsymbol{\Xi}_0 - \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{Y} < 0 \tag{3.19}$$

其中 $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4 \end{bmatrix}$。

证明　采用与定理 3.1 相同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.7)，计算可得前向微分(3.8)，对式(3.8)倒数第二项采用定界(3.9)，而对式(3.8)倒数第一项采用如下定界：

$$-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j = -h_{12}\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j - h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$= -h_{12}(d_k - h_1)\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j -$$

$$h_{12}(h_2 - d_k)\sum_{j=k-h_2}^{k-d_k-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j$$

$$\leqslant -\frac{1}{(d_k - h_1)/h_{12}}\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{(h_2 - d_k)/h_{12}}\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{v}_2,$$

其中 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_{k-h_1} - \boldsymbol{x}_{k-d_k}$，$\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{x}_{k-d_k} - \boldsymbol{x}_{k-h_2}$。

由于如果 $(d(k)-h_1)/h_{12} = 0$，则 $\gamma_1 = 0$，而如果 $(h_2 - d(k))/h_{12} = 0$，则 $\gamma_2 = 0$。由引理 3.3 可知，如果存在矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得式(3.18) 成立，则

$$-h_{12}\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1} \boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_j \leqslant -\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}。 \tag{3.21}$$

这样，可得 $\Delta V \leqslant \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1\boldsymbol{\xi}_k$。所以式(3.19)可以保证 $\Delta V(k)<0$。

注 3.3 文[91]中针对连续时间情况首次提出了反凸函数法，其中的数值算例表明该方法可以取得与积分不等式方法[63]相同的保守性。定理 3.3 将反凸函数法推广到了离散时间情况，并希望建立反凸函数法与 *Finsler* 引理方法(或有限和不等式方法、自由权矩阵方法)之间严格的等价性关系。

3.4 各种方法之间的联系

本节将证明 3.1 节～3.3 节所提出的各种稳定性判据之间的关系。

(1)类似于注 2.3，易知定理 3.1 给出的三个稳定性判据的保守性是依次降低的，即

判据(1.3)⇒判据(1.4)⇒判据(1.5)。

而令人感兴趣的是这种降低并没有以增加计算量为代价。

(2)定理 3.2 与定理 3.3 的等价性。

为了证明两者之间的等价性，需要引入以下引理。

引理 3.4[93] 对于正定矩阵 $\boldsymbol{R}$，矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$，如下表述

等价：

(1)$\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}<0$；

(2)存在适当维数矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda} & -\boldsymbol{R}\end{bmatrix}<0。$$

引理 3.5[94]　存在一个矩阵 X，使得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R} & \boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}>0$$

成立，当且仅当

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}>0 \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}>0$$

成立。

定理 3.4　对于系统(3.1)，稳定性条件(3.16)等价于稳定性条件(3.18)和(3.19)。

证明　根据引理 3.4，条件(3.18)和(3.19)等价于存在适维矩阵 Y 和 W，使得式(3.22)成立。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Theta}^{-1}\\ \boldsymbol{\Theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\Theta}^{-1}\end{bmatrix}<0, \tag{3.22}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Xi}_0+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Gamma}=[\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{W}]$。

由 Schur 补，式(3.22)等价于式(3.23)，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Gamma}\\ \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\Theta}\end{bmatrix}<0。 \tag{3.23}$$

另一方面，根据凸组合原理，定理 3.2 的式(3.16)等价于以下两个 LMI 条件：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{Y}\\ * & -\boldsymbol{R}_2\end{bmatrix}<0 \text{ 和} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{W}\\ * & -\boldsymbol{R}_2\end{bmatrix}<0, \tag{3.24}$$

这样根据引理 3.5，条件(3.24)等价于存在矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得式(3.25)成立

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} < 0。 \tag{3.25}$$

由 $R_2>0$，使用 Schur 补，式(3.25)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{W} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & X & -\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} < 0。 \tag{3.26}$$

然后，用 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ 左乘、右乘式(3.26)，可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} < 0。 \tag{3.27}$$

这样，令 $\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{S}$，就可使式(3.27)与式(3.23)完全一致。

注 3.4 定理 3.4 严格证明了反凸函数法等价于 Finsler 引理方法。从证明过程看，反凸函数法相当于将 Finsler 引理方法所得的两个 LMI 合并为一个更高维的 LMI。这种处理的优点是可以减少计算量，具体分析见 3.5 节。

(3)定理 3.3 与定理 3.1 中条件(3.4)的关系。

定理 3.5 对于系统(3.1)，如果定理 3.1 中条件(3.4)成立，则定理 3.3 的条件(3.18)和(3.19)必成立。

证明 首先，式(3.4)可以重写为

$$\boldsymbol{\Xi}_0 - \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\{\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_2\} \boldsymbol{Y} < 0, \tag{3.28}$$

这样根据引理 3.4，如果式(3.28)成立，则存在矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}=[\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{W}]$，使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_0 + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma}\bar{\boldsymbol{R}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} & -\bar{\boldsymbol{R}}_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.29}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{R}}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_2^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_2^{-1} \end{bmatrix}。$$

进而，由 Schur 补，易得式(3.29)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Y}^T & -\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{W}^T & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} < 0。 \tag{3.30}$$

而如果式(3.30)成立，则必存在矩阵 $\boldsymbol{X}$，使式(3.27)成立。由定理 3.4 可知，式(3.27)等价于式(3.18)和(3.19)。

注 3.4　定理 3.5 严格证明了定理 3.1 中(3.4)为定理 3.3 的充分条件，即定理 3.1 中(3.4)比定理 3.3 的保守性更大。定理 3.1 中的其他稳定性判据与定理 3.3 的关系目前还不能证明，虽然下一节的数值算例表明定理 3.3 的保守性更小。文[95]中的定理 4 存在错误，应按定理 3.5 进行更正。

3.5　数值算例和计算量分析

3.5.1　数值算例

例 3.1　考虑文[39]中给出的标称系统(3.1)，参数如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}。$$

计算 $h_1 = 2$、6、10 和 12 时，该系统渐近稳定的最大时滞上界 h_2，计算结果见表 3.1。由表 3.1 可见定理 3.2，定理 3.3 与文[90]中命题 1 具有最小的保守性。另外，文[39]中的稳定性判据有错误，需更正为：如果存在矩阵 $\boldsymbol{X}>0$，$\boldsymbol{Q}>0$，$\boldsymbol{R}>0$ 和 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2]$，$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{Z}_{ij})_{2\times 2}$，使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{\Gamma}_1^T\boldsymbol{P} & h_2\boldsymbol{\Gamma}_1^T\boldsymbol{R} \\ * & -\boldsymbol{P} & 0 \\ * & * & -h_2\boldsymbol{R} \end{bmatrix} < 0,$$

则系统(3.1)渐近稳定，其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = [\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{A}_d], \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{M}_1^T + \boldsymbol{M}_2 + h_2\boldsymbol{Z}_{12} \\ * & -\boldsymbol{M}_2^T - \boldsymbol{M}_2 + h_2\boldsymbol{Z}_{22} - \boldsymbol{Q} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+(h_2-h_1+1)\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_1+h_2\boldsymbol{Z}_{11}。$$

表 3.1　最大时滞上界 h_2

方法	$h_1=2$	$h_1=6$	$h_1=10$	$h_1=12$
文[84]	7	9	12	13
文[85]	10	11	13	14
文[86]	10	12	16	16
文[87]	13	14	15	17
文[39]	10	11	13	14
文[89]	13	14	17	18
文[56]	17	18	20	21
文[96]	17	18	20	21
文[90]中命题 2	16	16	18	21
文[90]中命题 1	17	18	20	21
定理 3.1 判据(3.4)	13	14	17	18
定理 3.1 判据(3.5)	14	16	18	19
定理 3.1 判据(3.6)	16	17	19	20
定理 3.2	17	18	20	21
定理 3.3	17	18	20	21

3.5.2　计算量分析

根据文[97],求解 LMI 的内点法的计算量正比于 $L(M)^3$,其中 L 为 LMI 的行(列)数,M 为 LMI 的求解变量数。这样,可知文[90]中命题 1 的计算量正比于 $L_1(M_1)^3$,其中 $M_1=8n^2+3n$,$L_1=14n$。而定理 3.3 的计算量正比于 $L_2(M_2)^3$,其中 $M_2=3.5n^2+2.5n$,$L_2=11n$。定理 3.1 判据(3.6)的计算量正比于 $L_3(M_3)^3$,其中 $M_3=2.5n^2+2.5n$,$L_3=13n$。由表 3.2 可见,定理 3.3 的计算量仅为文[90]中命题 1 的计算量的 1/10。定理 3.1 的判据(3.6)具有比文[90]中命题 2 更低的保守性,同时定理 3.1 的判据(3.6)的计算量也更小。

表 3.2　各种方法的计算量

方法	文[98]	文[90]命题 1	文[90]命题 2	定理 3.3	判据(3.6)
LM^3	1,664,000	1,536,416	209,952	150,898	87,750

第 4 章　线性时滞系统的控制器设计

系统的稳定性分析和控制器设计是两个相互联系的问题。对于一般线性系统，只要在稳定性判据的基础上，进行合同变换和变量代换，就可以方便地得到控制器设计相关 LMI。但是，对于时滞系统而言，镇定控制器的设计问题将不再能简单地直接解决。这是由于在时滞系统控制器设计中，将不可避免地涉及到非线性矩阵不等式(NLMI)的求解问题，而对于该问题目前还缺乏有效的统一解决方案。在本章中，将在文[54-56]的基础之上，分别以定常时滞系统和时变时滞系统为例，提出三种改进的时滞相关控制器设计算法。需要说明的是本章讨论主要针对连续时间系统进行，但是所采用的方法完全可以平移到离散时间情况。

4.1　随机初始化间接迭代算法

首先考虑定常时滞系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{4.1}$$

设计状态反馈控制 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 使得闭环系统渐近稳定，其中 $d>0$ 为定常时滞。

考虑推论 2.1，将 $\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ 代替式(2.16)的 $\boldsymbol{A}$，再用 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1}, \boldsymbol{P}^{-1}, \boldsymbol{R}^{-1}\}$ 取合同变换，并令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}$，可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X}+\bar{\boldsymbol{R}} & d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}} \\ * & -\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & d\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{W} \end{bmatrix} < 0。 \tag{4.2}$$

注意到式(4.2)中 $-\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{W}$ 一项，式(4.2)不再是 LMI。求解 NLMI(4.2)的方法主要有：参数设定法、矩阵分解法、锥补线性化(CCL)方法[54]、序贯线性规划矩阵(SLPM)方法[55]。参数设定法是设置 $\bar{\boldsymbol{R}}=\varepsilon\boldsymbol{W}$，这样通过调整参数 ε，式(4.2)将变为 LMI。矩阵分解法是将矩阵 A_d 适当地分解为两部分，将式(4.2)将变为 LMI。CCL 方法是通过对式(4.2)进行适当放松，进而迭代求解一个非线性优化问题。文[36]比较了这三种算法的保守性，数值结果表明：矩阵分解法的保守性最低，CCL 法次之，参数设定法最高。但矩阵分解法的保守性取决于如何分解矩阵 $\boldsymbol{A}_d$，而目前并没有有效的最优分解方法。CCL 法由于人工设定参数较少，且保守性较小，而得到了最广泛的采用。SLPM 法实质上是对 CCL 法的改进，其通过引入线性搜索，弥补了 CCL 法不能保证算法收敛的问题。CCL 法的另一个重要改进是文[56]提出的，利用迭代过程中求得的控制器增益求解原稳定性判据，从而获得更快的收敛速度。

注意到 CCL 法和 SLPM 法都是局部优化算法，所以这两种方法必然都只能取得局部最优解，且优化结果对算法初始值敏感。下面综合已有算法的优点，提出一种随机初始化 CCL 方法。

算法 4.1 (随机初始化 CCL 方法)

给定最大迭代次数 $t_{\max}$ 和随机试验次数 $i_{\max}$，小正数 δ。定义 $\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{W},\bar{\boldsymbol{R}},\boldsymbol{J})$，$\hat{\boldsymbol{Y}}=\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{J}})$。

Step 1 设 $d>0$ 为足够小的初始时滞上界，$i=1$。

Step 2 如果 $i<i_{\max}$，在指定初始范围内随机产生反馈增益 $\boldsymbol{K}^i$；否则，退出迭代。

Step 3 求解 LMI(4.3)和(4.4)，得可行解 $(\boldsymbol{Y}^0,\hat{\boldsymbol{Y}}^0,\bar{\boldsymbol{Q}})$，并设 $t=0$。如果 Step 3 没有可行解，返回 Step 2，并令 $i=i+1$。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{Ki}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_{Ki}^{\mathrm{T}}i+\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{W}+\bar{\boldsymbol{R}} & d\boldsymbol{A}_{Ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\\ * & -\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & d\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\\ * & * & -\boldsymbol{J}\end{bmatrix}<0, \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{J}} & \hat{\boldsymbol{W}}\\ * & \hat{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{J} & \boldsymbol{I}\\ * & \hat{\boldsymbol{J}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \hat{\boldsymbol{W}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \hat{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\boldsymbol{W}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}>0,\bar{\boldsymbol{R}}>0, \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{Ki}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^i$。

Step 4　在约束条件(4.4)和(4.6)下，求解优化问题(4.5)，得最优解$(\boldsymbol{Y}^*,\hat{\boldsymbol{Y}}^*,\bar{\boldsymbol{Q}},\boldsymbol{Y}^*)$。

$$\text{Minimize trace}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Y}}+\hat{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}) \tag{4.5}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{W}+\bar{\boldsymbol{R}} & d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}} \\ * & -\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}} & d\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\boldsymbol{J} \end{bmatrix}<0, \tag{4.6}$$

Step 5　由 Step 4 得到的最优解，计算 $\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{Y}^*(\boldsymbol{W}^*)^{-1}$。将 $\boldsymbol{A}_K^*=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*$ 取代式(2.16)中的 A，求解式(2.16)的可行性。如果式(2.16)可行，则增大 d，并设 $i=1$，返回 Step 2。

Step 6　如果 $\left|\text{trace}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Y}}^*+\hat{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^*-2\text{trace}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Y}}^t)\right|\leqslant\delta$ 或 $t+1\geqslant t_{\max}$，则返回 Step 2，并令 $i=i+1$。

Step 7　对 $\alpha\in[0,1]$求解优化问题(4.7)，得最优解 α^*。

$$\min_{\alpha\in[0,1]}\ \text{trace}(\boldsymbol{Y}^t+\alpha(\boldsymbol{Y}^*-\boldsymbol{Y}^t))(\hat{\boldsymbol{Y}}^t+\alpha(\hat{\boldsymbol{Y}}^*-\hat{\boldsymbol{Y}}^t))。 \tag{4.7}$$

设 $\boldsymbol{Y}^{t+1}=\boldsymbol{Y}^t+\alpha(\boldsymbol{Y}^*-\boldsymbol{Y}^t)$，$\hat{\boldsymbol{Y}}^{t+1}=\hat{\boldsymbol{Y}}^t+\alpha(\hat{\boldsymbol{Y}}^*-\hat{\boldsymbol{Y}}^t)$，返回 Step 4。

注 4.1　算法 4.1 是在 CCL 法和 SLPM 法的基础上结合随机初始化机制构建起来的，其中 Step 4 和 Step 7 分别对应 CCL 法和 SLPM 法，随机初始化在 Step 2 和 Step 3 中实现，随机初始化有助于克服 CCL 法和 SLPM 法容易停止于局部次优解的问题。

注 4.2　在算法 4.1 中，首先随机产生反馈增益 K^i，再将其转化为用于迭代的初始值$(\boldsymbol{Y}^0,\hat{\boldsymbol{Y}}^0,\bar{\boldsymbol{Q}})$。这种处理方法可以大大减少随机初始值的维数，更重要的是反馈增益的大小反映了控制作用的强弱，所以可以利用对反馈增益的先验知识，确定反馈增益的取值范围。值得说明的是，反馈增益初始值的取值范围并不能直接限定最终取得的反馈增益值。在算法 4.1 中，没有具体给定产生反馈增益的随机算法，一种基本选择是依均匀分布产生，而如果具有更多的对反馈增益的先验知识，也可以选择依据其他类型的统计分布。不采用随机算法，而是在指定范围内等间距选择反馈增益也是一种可行的选择。另外，对于固定

的随机试验次数 $i_{\max}$，随着指定范围的增大，反馈增益的初始分布将变得更加稀疏，这使得仅仅增大指定范围，有时并不能取得更好的效果。

4.2 基于 Finsler 引理的直接算法

考虑定理 2.1，用 $\boldsymbol{A}_K=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ 取代式(2.4)中的 $\boldsymbol{A}$，且取 $\boldsymbol{S}_3^{\perp}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ 可得

$$\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}<0, \tag{4.8}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}d^2\boldsymbol{R}&\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}*&\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}&\boldsymbol{R}*&*&-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{R}\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}_K&-\boldsymbol{A}_d\end{bmatrix}。$$

参数化乘子矩阵 $\boldsymbol{X}$ 为 $[\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{0}]$，对式(4.8)的左边用 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{N}^{-1},\boldsymbol{N}^{-1},\boldsymbol{N}^{-1}\}$ 取合同变化，并令 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{N}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{VPV}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{VQV}$，$\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{VRV}$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{KV}$，可得

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}+\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{X}}<0, \tag{4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}d^2\bar{\boldsymbol{R}}&\bar{\boldsymbol{P}}&\boldsymbol{0}*&\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}}&\bar{\boldsymbol{R}}*&*&-\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}&-\boldsymbol{AV}-\boldsymbol{BU}&-\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{V}\end{bmatrix},\tilde{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}。$$

这样，可得如下一种避免迭代过程的直接控制器设计算法[71]。

算法 4.2 （直接控制器设计算法）

Step 1 设 $d>0$ 为足够小的初始时滞上界。

Step 2 对于正定对称矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}},\bar{\boldsymbol{Q}},\bar{\boldsymbol{R}}$ 和矩阵 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}$，求解式(4.9)。如果式(4.9)不成立，退出算法。

Step 3 如果状态反馈增益 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{UV}^{-1}$ 满足设计要求，记 $d_{\max}=d$，

$\boldsymbol{K}^{\cdot}=\boldsymbol{K}$，增大 d，返回 Step 2；否则，退出算法。

注 4.3　算法 4.2 通过将乘子矩阵适当地参数化，直接获得状态反馈增益，从而避免了迭代过程。但将 $\boldsymbol{X}$ 参数化为$[\boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{0}]$会由于丧失一定的自由度，从而增大保守性。不过 4.4 节中的数值算例表明，该算法的保守性并不太大。

4.3　基于 BMI 的迭代算法

本节以如下时变时滞系统为例：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h_t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), & \forall t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta), & \forall \theta\in[-\bar{h},0],\end{cases}\tag{4.10}$$

提出一种基于 BMI 的控制器设计方法。其中 h_t 表示时变时滞，且满足：$0\leqslant h_t\leqslant\bar{h}$，$\bar{h}>0$，$\dot{h}_t\leqslant\mu$。

考虑定理 2.2，根据 Schur 补，并用 $\boldsymbol{AK}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ 取代 $\boldsymbol{A}$，由式(2.24)可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & -(1-\mu)\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -h_t\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & -\hat{h}_t\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{R}\end{bmatrix}+\tag{4.11}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8 & \boldsymbol{0}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times 5n} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8 & \boldsymbol{0}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times 5n} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0$$

注意到式(4.11)中的非线性体现在存在耦合项 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_K$、$\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_K$ 及其转置，故 NLMI(4.11)是关于$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$和 $\boldsymbol{A}_k$ 的 BMI，因此如果固定$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$，式(4.11)是关于 K 的 LMI；如果固定 $\boldsymbol{K}$，式(4.11)是关于$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$的 LMI，这样 NLMI(4.11)可以使用 BMI 技术迭代求解。

在 BMI 迭代求解中，首先需要考虑初始值设置问题。由于$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$

要求正定，而对 $\boldsymbol{K}$ 一般无先验知识，故初始设置$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$为较合理的选择。另外，在迭代算法中增加一定的松弛度，有助于防止算法过早停止。

下面，给出基于 BMI 的控制器求解算法的具体步骤。

算法 4.3 （BMI 迭代法）

Step 1 给定 $\bar{h}>0$，设置初始值 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}$，令 $i=0$。

Step 2 由$(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{R}_i)$，求解如下优化问题：在约束(4.12)下，最小化 α。

$$\boldsymbol{\Psi}_1+\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) & \boldsymbol{O}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times 5n} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) & \boldsymbol{O}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times 5n} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\alpha\cdot\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,h_t\boldsymbol{R}_i,\hat{h}_t\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{R}_i\}\leqslant 0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0, \tag{4.12}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i\\ * & -(1-\mu)\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -h_t\boldsymbol{R}_i & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & -\hat{h}_t\boldsymbol{R}_i & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & * & -\bar{h}\boldsymbol{R}_i\end{bmatrix},$$

得最优解 $\boldsymbol{K}$ 和 α，如果 $\alpha<0$，则停止算法，且 $\boldsymbol{K}$ 即为所求控制器增益；否则令 $\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{K}$。

Step 3 由 $\boldsymbol{K}_i$，计算 $\boldsymbol{A}_{Ki}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_i$。求解如下优化问题：在约束(4.13)下，最小化 α，

$$\boldsymbol{\Psi}_2+\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) & \boldsymbol{O}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times 5n} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_8(h_t) & \boldsymbol{O}_{5n\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times 5n} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\alpha\cdot\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,h_t\boldsymbol{R},\hat{h}_t\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\}\leqslant 0,$$

$$\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{R}>0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0 \tag{4.13}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{Ki}+\boldsymbol{A}_{Ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_{Ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & -(1-\mu)\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{h}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -h_t\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & -\tilde{h}_t\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & * & -\bar{h}\boldsymbol{R}\end{bmatrix},$$

得可行解$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{R})$和$\alpha$，如果最优解$\alpha<0$，则停止算法，且$\boldsymbol{K}_i$即为所求控制器增益。

Step 4　由$\boldsymbol{K}_i$和α，求解如下优化问题：在约束(4.13)下，最小化 trace$(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R})$。得最优解$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{R}$，令$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}$。

Step 5　令$i=i+1$，如果$i\leqslant i_{\max}$且$\|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{i-1}\|/\|\boldsymbol{P}_i\|+\|\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_{i-1}\|/\|\boldsymbol{R}_i\|\geqslant\varepsilon$，$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}_{i-1}$，$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}_{i-1}$，跳转至 Step 2。

Step 6　重新设定初始值$\boldsymbol{P}_0$和$\boldsymbol{R}_0$，跳转至 Step 1；或停止算法，无可行控制器增益。

注 4.4　算法 4.3 中的 Step 2 和 Step 3 需要求解一个广义特征值问题，可以用 MATLAB/LMI 工具箱中的函数 gevp 实现。由于 BMI 迭代法为局部收敛算法，所以通过随机设置初始值$\boldsymbol{P}_0$和$\boldsymbol{R}_0$，可以在一定程度上改进算法 4.3 的保守性。

4.4　数值分析

例 4.1　考虑系统(4.1)，参数为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -0.5\\ 0 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}。$$

设置算法参数为$t_{\max}=100$和$i_{\max}=10$，对于不同的初始范围，由算法 4.1 可得最大时滞上界$h_{\max}$和相应的控制增益矩阵$\boldsymbol{K}^*$(见表 4.1)。

表 4.1　算法 4.1 的结果

初始范围	$d_{\max}$	$\boldsymbol{K}^*$
1	0.8	[−2.4391　−5.5057]
10	1.1	[−20.9611　−15.4806]
100	1.0	[−2.3654　−2.3523]
1000	1.3	[−3.5437　−2.8088]
10000	1.2	[−3.2167　−2.4341]
100000	1.7	[−9.3037　−4.7755]

为了便于比较，在算法 4.2 中对控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的大小进行不同的限制，即限定 $k_{ij}\leqslant\delta,\delta>0$，其中 k_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的元素。对于不同的 δ，由算法 4.2 得到最大时滞上界和相应的控制增益矩阵（见表 4.2）。在表 4.2 中，“—”表示没有可行解。

表 4.2　算法 4.2 的结果

δ	$d_{\max}$	$\boldsymbol{K}^*$
1	—	—
5	0.8	[−4.1530　−3.8543]
10	1.0	[−9.1537　−5.6192]
20	1.7	[−19.3909　−7.8742]
30	2	[−29.6285　−10.5247]
40	2.2	[−39.9827　−13.2970]
50	2.3	[−46.7779　−15.1364]
100	2.8	[−98.9933　−29.1903]
1000	5.0	[−986.0011　−257.4562]
10000	8.6	[−9844.5　−2497.0]
100000	15.6	[−99893　−25074]

与算法 4.2 相似，为了便于比较，在算法 4.3 中对控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}$

的大小进行不同的限制，即限定 $|k_{ij}\leqslant\delta,\delta>0$，，其中 k_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的元素。对于不同的 δ，由算法 4.3 得到最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 和相应的控制增益矩阵（见表 4.3 和表 4.4）。需要注意的是其中采用了不同的初始时滞 $\bar{h}$。

表 4.3　算法 4.3 的结果

δ	$\bar{h}_{\max}$	$\boldsymbol{K}^*$
1	—	—
5	13	[0.0236　−2.0332]
10	83	[0.0545　−7.9042]
20	388	[0.0789　−16.6786]
30	204	[0.0439　−8.6250]
50	354	[0.1565　−40.9669]

表 4.4　算法 4.3 的结果

δ	$\bar{h}_{\max}$	$\boldsymbol{K}^*$
1	—	—
5	5	[0.0085　−1.3317]
10	74	[0.0078　−2.3657]
20	396	[0.0400　−19.0098]
30	55	[0.6360　−14.3252]
50	17	[6.8392　−45.3337]

分析表 4.1～表 4.4 的结果，可得如下结论：

（1）对于算法 4.1，随着增大初始范围，一般可以取得更大的最大时滞上界 $d_{\max}$。但有时会得到相反的结果，这是由于对于固定的 $i_{\max}$，增大初始范围，会导致样本稀疏。如果在增大初始范围时，同时增大 $i_{\max}$，可以使初始范围和 $d_{\max}$ 一致增大。

（2）对于算法 4.2，放松对控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的限制，可以取得更大的 $d_{\max}$。

(3)如果不限制控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}$,算法 4.2 比算法 4.1 可以取得更大的 $d_{\max}$。而当 $d_{\max}$ 相同时,可以发现算法 4.1 得到的控制增益比算法 4.2 更小,这与注 4.4 中的讨论相符,即反映了算法 4.2 中将乘子矩阵设定为特殊结构所引起的保守性。

(4)但与算法 4.2 相比,算法 4.3 由于没有将乘子矩阵约束为特殊形式,保留了稳定性判据的自由度,使其常可取得非常大的时滞上界。并且算法 4.3 所取得的控制器增益一般比算法 4.2 要小。但是,算法 4.3 受初始参数设置的影响很大,一般需要经过大量尝试,才能获得满意的结果。

4.5 TCP/AQM 系统设计

网络拥塞是网络用户对网络资源的需求超过了其固有容量时,出现的一种持续过载的网络状态。当拥塞发生时,路由器中排队的报文数目超出缓冲区能够容纳的限度,导致缓冲区溢出,路由器开始丢弃报文。主要表现为分组丢失率高,端到端时滞大,甚至有可能使计算机网络发生拥塞崩溃。拥塞控制是采取措施避免拥塞的发生,或者对已经发生的拥塞做出处理,从而防止网络出现拥塞崩溃,使网络能运行在最佳状态。拥塞控制是保证因特网可靠运行和不断扩充的关键技术之一。1986 年 10 月,因特网发生第一次"拥塞崩溃",之后拥塞控制成为计算机网络领域持续的研究热点。

目前,因特网中广泛采用的是 TCP(Transmission Control Protocol)协议的 AIMD(Additive Increase Multiplicative Decrease)拥塞控制机制,这种主要依靠端节点执行拥塞控制的机制称为端到端拥塞控制(end-to-end congestion control)。在端到端拥塞控制中,作为拥塞直接感知者的路由器采用简单的弃尾(Drop Tail)队列管理方法,只有当缓冲区满时,才开始丢弃到达的报文。但是,端到端拥塞控制和弃尾队列管理方法容易导致如下问题:

- 队列长期处于满状态,导致报文排队时滞大;
- 容易引起全局同步现象,导致同络吞吐量下降;

●报文丢弃率高，对突发流尤其不利。

针对端到端拥塞控制和弃尾队列管理方法的不足，IETF(Intemet Engineering Task Force)建议在路由器中采用主动队列管理机制(Active Queue Management)，克服队列弃尾的缺陷，在尽力服务网络中提供低延迟、低丢失率和公平的服务。AQM 机制使路由器参与到网络拥塞控制中，TCP 拥塞控制主要根据报文丢弃或报文标记调节拥塞窗的大小，AQM 机制则根据路由器感知到的网络拥塞状况，以一定的概率标记或丢弃报文。衡量 AQM 算法的常用性能指标有链路利用率、报文丢弃率、平均队列长度以及公平指数等。平均队列长度决定了报文的排队时滞，队列长度的起伏(称为队列动荡)决定了时滞抖动。因此 AQM 机制的主要目标之一是将队列长度控制在较低的水平，并且使得队列动荡比较小。

2000 年，V. Misra 等建立了 TCP 与队列变化的非线性微分方程模型[99]。2001 年，C. Hollot 等人用小信号理论对 V. Misra 给出的 TCP 流量控制模型进行线性化处理后，用经典线性控制理论分析了系统稳定性[100]。文献[101-104]进而将 PI (Proportional integral)控制器用于主动队列管理，增强了对队列长度的控制能力。随后，一些文献进一步研究将 PID 调节器用于 AQM 控制，并通过仿真表明其与 PI 调节器相比的优越性[105-106]。另外，也有研究者引入 H_∞ 控制、模糊控制等先进控制方法到 AQM 控制设计中[107-110]。

但是已有研究，大都没能考虑 TCP/AQM 系统中固有的时滞问题，本节将应用 4.1～4.3 节提出的时滞系统控制器综合算法，进行 TCP/AQM 系统中的 AQM 控制设计。

如下非线性流体流模型被用来描述 TCP /AQM 控制系统：

$$\dot{W}(t)=\frac{1}{R(t)}-\frac{W(t)}{2}\frac{W(t-R(t))}{R(t-R(t))}p(t-R(t)), \tag{4.14}$$

$$\dot{q}(t)=-C+\frac{N(t)}{R(t)}W(t), \tag{4.15}$$

其中 $W(t)$是 TCP 流的平均窗口大小；$q(t)$是瞬时队列长度；T_p 是传播时滞；$R(t)=q(t)/C+T_p$ 是往返时间(Round Trip Time，RTT)；C

是链路容量；N 为 TCP 连接数目；$p(t)$为丢包概率。模型(4.14)和(4.15)反映了具有平均窗口大小和平均队列长度的 TCP 动态特性。式(4.14)描述了 TCP 的拥塞窗口调节机制，采用加性增加/乘性减少(AIMD)拥塞控制算法估计 TCP 流的拥塞窗口大小。式(4.14)中的第一项描述了 AIMD 的加性增加部分，如果没有报文丢失，每经过一个 RTT，TCP 拥塞窗口加 1；式(4.14)中的第二项描述了 AIMD 的乘性减少部分，当检测到报文丢失时，拥塞窗口减少为原来的一半。式(4.15)描述了路由器中队列随时间变化的模型，瞬时队列长度 $q(t)$由报文到达速率和链路带宽之间的差值决定。当队列长度大于零时，路由器转发报文，队列长度不断减少；否则，TCP 连接发送报文到路由器，队列长度累积增长。

由 $\dot{W}(t)=0$ 和 $\dot{q}(t)=0$，可以定义平衡点：

$$\begin{cases} W_0^2 p_0 = 2, \\ W_0 = \dfrac{R_0 C}{N}, R_0 = \dfrac{q_0}{C} + T_p, \end{cases} \tag{4.16}$$

假设 RTT 定常不变，$R(t)=R_0$，可以得到线性化模型：

$$\begin{cases} \delta\dot{W}(t) = -\dfrac{N}{R_0^2 C}(\delta W(t) + \delta W(t-R_0)), \\ -\dfrac{1}{R_0^2 C}(\delta q(t) - \delta q(t-R_0)) - \dfrac{R_0 C^2}{2N^2}\delta p(t-R_0), \\ \delta\dot{q}(t) = \dfrac{N}{R_0}\delta W(t) - \dfrac{1}{R_0}\delta q(t) \end{cases} \tag{4.17}$$

其中 $\delta W = W(t) - W_0$，$\delta q = q(t) - q_0$，$\delta p = p(t) - p_0$。

将式(4.17)写为矩阵形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-h) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-h), \\ \boldsymbol{x}_0(\theta) = \boldsymbol{\varphi}(\theta), \theta \in [-h, 0], \end{cases} \tag{4.18}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta W(t) \\ \delta q(t) \end{bmatrix}$为状态向量，$u(t)=\delta p(t)$为控制输入，$\varphi(\theta), \theta \in [-h, 0]$为初始状态，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{N}{R_0^2 C} & -\dfrac{1}{R_0^2 C} \\ \dfrac{N}{R_0} & -\dfrac{1}{R_0} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} -\dfrac{N}{R_0^2 C} & \dfrac{1}{R_0^2 C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{C^2R_0}{2N^2}\\ 0\end{bmatrix}。$$

丢包概率 $p(t)$由 AQM 机制确定，其控制目标是确保缓冲区中队列长度稳定在适当大小。下面考虑一种状态反馈 AQM 机制：

$$\delta p(t)=k_1\delta W(t)+k_2\delta q(t), \tag{4.19}$$

由式(4.17)，可得

$$\delta p(t)=k_1\left(\frac{R_0}{N}\delta\dot{q}(t)+\frac{1}{N}\delta q(t)\right)+k_2\delta q(t)=\left(\frac{k_1}{N}+k_2\right)\delta\dot{q}(t)+\frac{k_1R_0}{N}\delta q(t)。 \tag{4.20}$$

所以状态反馈 AQM 机制(4.19)本质上是一种 PD 控制律。

注意到线性化模型(4.17)实际上就是一个定常时滞线性系统，所以采用算法 4.2，可以计算使得闭环系统稳定的状态反馈增益。

考虑如下系统参数：$N=60$ TCP sessions，$C=3750$ packets/s，$T_p=0.2$ seconds，期望队列长度 $q_0=200$ packets，这样有 $W_0=15.83$ packets，$p_0=0.007977$，$R_0=0.2533$ seconds。

采用算法 4.2，可得控制器增益为：$\boldsymbol{K}=[-0.1427\quad 0.0058]\times e^{-3}$(控制器 1)。

注意到，线性化模型(4.17)中系统矩阵与 RTT 相关，而 RTT 又由队列长度决定。队列长度的变化会导致 RTT 的变化，所以如果能考虑 RTT 变化导致的系统参数不确定性，将更加合理，且使得设计的控制器更具有鲁棒性[111]。

将不确定性参数 R_0 从系统矩阵中分解出来，可以构造如下的多胞型不确定系统：

$$\boldsymbol{A}=\rho_1\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\N&-1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_0}+\rho_2\underbrace{\begin{bmatrix}-\dfrac{N}{C}&-\dfrac{1}{C}\\0&-0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1},\ \boldsymbol{A}_d=\rho_2\underbrace{\begin{bmatrix}-\dfrac{N}{C}&\dfrac{1}{C}\\0&0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_{d0}},\ \boldsymbol{B}=\rho_3\underbrace{\begin{bmatrix}-\dfrac{C^2}{2N}\\0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0},$$

其中 $\rho_1=1/R_0$，$\rho_2=1/R_0^2$，$\rho_3=R_0$。

假设队列长队变化范围为[0,400]，可得 RTT 变化范围为[0.2，0.3067]。采用算法 4.2，可得控制器增益为：$\boldsymbol{K}=[2.733-0.02215]\times e^{-3}$（控制器 2）。

为了提高控制性能，考虑采用 α-稳定性的概念。通过模型变换 $z(t)=e^{\alpha t}x(t)$，可以得到新系统$(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}, e^{\alpha h}\boldsymbol{A}_d, e^{\alpha h}\boldsymbol{B})$。可以证明，只要新系统渐近稳定，则原系统具有 α-稳定性，即所有极点的实部小于 α。以 $\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$、$e^{\alpha h}\boldsymbol{A}_d$ 和 $e^{\alpha h}\boldsymbol{B}$ 代替 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$ 和 $\boldsymbol{B}$，求解算法 4.2，可得控制器增益为：

当 $\alpha=2$ 时，$\boldsymbol{K}=[1.576 \quad 0.005105]\times e^{-3}$（控制器 3）。

利用控制器 1、控制器 2 和控制器 3 获得控制效果见图 4.1。由图 4.1 可见，通过设置衰减率 α 可以系统加快响应速度，改善控制性能。

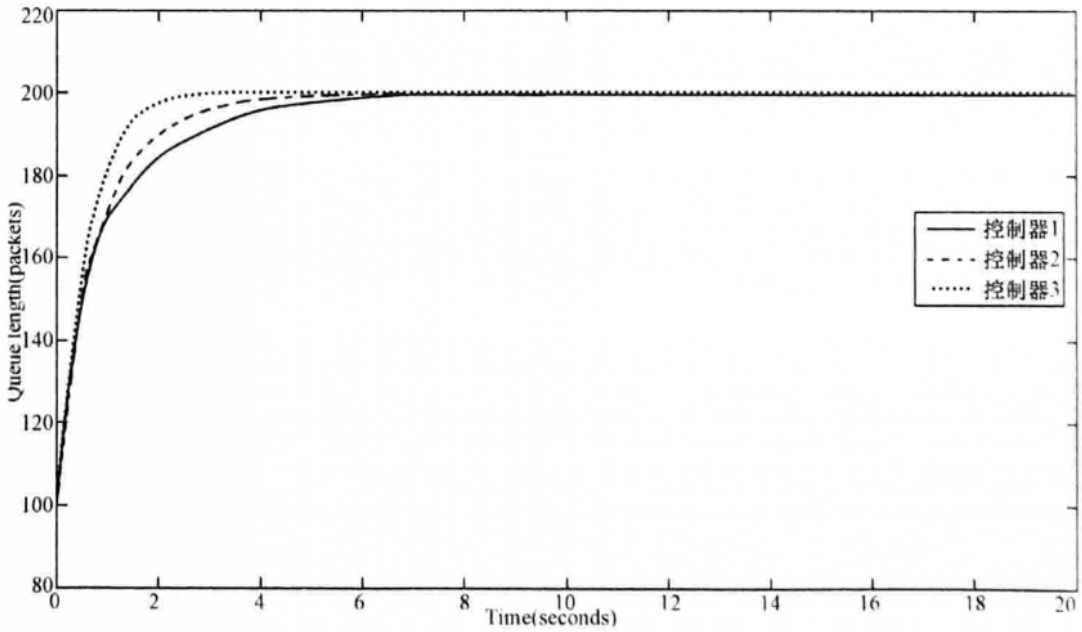


图 4.1　控制效果

4.6　网络化 AGC 系统控制

自动发电控制（Automatic generation control，AGC）是电力系统

负荷频率控制(LFC)的主要手段之一。根据 IEEE 的定义,自动发电控制是指:根据系统频率、输电线负荷变化及其相互之间关系,对某一地区内发电机有功功率进行调节,以维持系统预定频率和地区间交换功率在设定范围之内[112]。

AGC 的控制准则体现为区域控制偏差(Area Control Error, ACE),控制器一般采用积分调节方式,即有功功率增量为 $\Delta P_{Gi}=-k_i\int(ACE_i)\,dt$。根据 ACE 的不同,存在以下三种基本的 AGC 控制策略[113]:

1. 恒定频率控制(FFC):$ACE_i=B_i\Delta f_i$;

2. 恒定净交换功率控制(FTC):$ACE_i=\Delta P_{tie,i}$;

3. 联络线频率偏差控制(TBC):$ACE_i=B_i\Delta f_i+\Delta P_{tie,i}$。

其中 B_i 为频率偏差系数,Δf_i 为频率增量,$\Delta P_{tie,i}$ 为联络线功率增量。

三种 AGC 控制策略中,FFC 适合于孤立电力系统或者互联电力系统的中心控;FTC 适合于小区域电力系统,但不利于系统频率的恢复;TBC 控制方式可以实现有功功率的就地平衡,有利于体现公平、公正的调频原则,适合于区域互联系统中容量相当的子系统。此外,互联电网的控制模式可以有不同的组合方式,例如全网 FFC 方式,即控制中心和子系统均采用 FFC 策略;或 FFC-TBC 方式,控制中心采用 FFC 策略,子区域采用 TBC。华东电网即采用 FFC-TBC 模式[114]。限于篇幅,本节只研究 TBC 控制方式。

在实际应用中,AGC 需要在广域复杂互联电网条件下进行信号采集、处理和传输,而这些环节都存在时滞的影响。网络化 AGC 系统通信时滞包括两部分:控制中心到电厂自动化系统的通信时滞,和调速器到机组智能执行机构的通信时滞。从控制中心到电厂自动化系统属于广域网通信,发送周期一般为 3～4 秒,其他时滞包括端系统数据处理时滞、传输时滞以及数据包在路由器中的排队时滞。对于采用 SDH (Synchronous Digital Hierarchy,同步数字体系)上的专用通道或 IP 交换方式,总的信号时滞大约在数百毫秒以内。从调速器到智能执行机构通信属于局域网通信(如工业以太网),发送周期为毫秒级,其他时

滞包括：端系统的数据处理时、传输时滞以及数据包在交换机的等待时滞，总时滞基本在毫秒级以内[112]。因此，通信时滞已经成为广域复杂互联电网中 AGC 系统的一个基本特点和主要问题，它导致 AGC 系统在本质上成为一个时滞动力学模型。

时滞系统的动力学行为比非时滞系统更复杂，时滞的存在往往也是系统不稳定和系统性能变差的根源之一。刘梅招等采用复频域方法研究了均匀时滞情况下 AGC 系统的稳定性，但其采用的方法只适用于定常时滞情况，且计算量巨大[114]。文献[115]对基于开放通信网的 AGC 进行了研究，文中采用 LMI 设计了时滞无关型控制器，但是时滞无关型控制器往往比较保守。何飞跃等基于 LMI 方法研究了定常时滞情况下附加状态反馈的 AGC 问题，但是采用的状态反馈控制策略在实际中是不可行的[112]。本节将利用第 2 章和本章提出的时滞相关方法进行 AGC 系统稳定性分析和控制器设计。

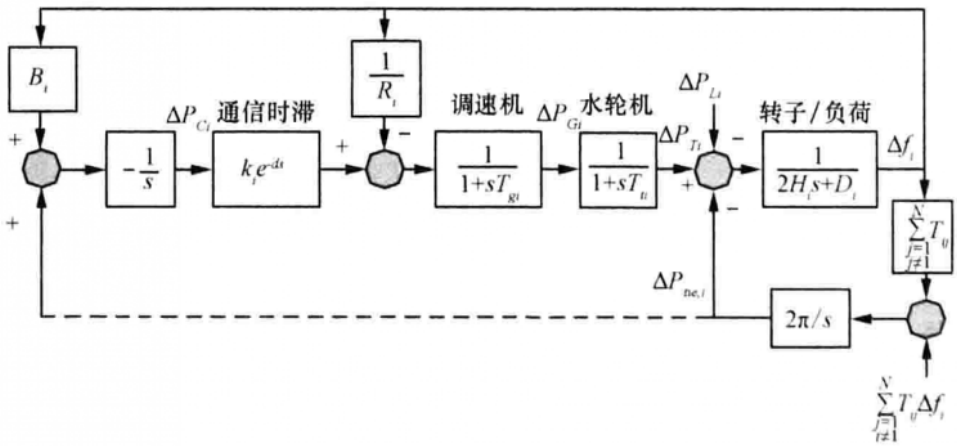


图 4.2　系统框图

考虑了时滞影响的 AGC 系统结构如图 4.2 所示。其中将从控制中心到智能执行机构的所有时滞归结为单时滞环节 e^{-ds}，时滞 d 可以是定常的，也可以是随机的。图 4.2 中的虚线表示 TBC 方式中的联络线功率反馈。

根据图 4.2，可以列写 AGC 系统的状态方程：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t-d(t)),\end{cases}\tag{4.21}$$

其中：

$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_N(t)\}$，$\boldsymbol{x}_i(t)=\mathrm{col}\{\Delta f_i(t),\Delta P_{Ti}(t),\Delta P_{Gi}(t),\Delta P_{Ci}(t),\Delta P_{tie,i}(t)\}$，

$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{N\times N}$，$\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_N\}$，$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k_1,\cdots,k_N\}$，$\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_N\}$，

$$\boldsymbol{A}_{ii}=\begin{bmatrix}-\dfrac{D_i}{2H_i} & \dfrac{1}{2H_i} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2H_i}\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ti}} & \dfrac{1}{T_{ti}} & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{R_iT_{gi}} & 0 & -\dfrac{1}{T_{gi}} & 0 & 0\\ -B_i & 0 & 0 & 0 & -1\\ \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}T_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{ij,}=\begin{bmatrix}0 & 0000\\ 0 & 0000\\ 0 & 0000\\ 0 & 0000\\ -T_{ij} & 0000\end{bmatrix},j\neq i$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{1}{T_{gi}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_i=[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]。$$

由式(4.21)可见，AGC 的控制器设计可以归结为一个定常时滞(或随机时滞)系统的静态输出反馈(SOF)控制问题。对于该问题，可以通过求解算法 4.3 获得控制器增益。但是，必须注意的是：由于 $\sum_{i=1}^{N}\Delta P_{tie,i}(t)=0$，状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 中必然存在一个冗余变量，造成 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值总为 0。在稳定性分析和控制器设计时，这个冗余变量会使得相应的 LMI 无法找到可行解。为了解决这个问题，需要删除 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的最后一行，以及 $\boldsymbol{C}$ 的最后一列。

为了验证本节提出方法的可行性，下面考虑一个 2 区域 AGC 系统，系统参数如下[116]：

表 4.5　2 区域 *AGC* 系统参数

	D	$2H$	R	T_g	T_t	B	T_{ij}
区域 1	0.015	0.1667	3.00	0.08	0.40	0.3483	$T_{12}=0.2$
区域 2	0.016	0.2017	2.73	0.06	0.44	0.3827	$T_{21}=0.2$

首先考虑定常时滞情况，采用文[116]给出的控制器 $k_1=0.3$，$k_2=0.2$，由稳定性判据可以求得最大时滞 15 s。实际上，采用 SIMULINK 仿真，可以发现时滞为 17 s 时，系统出现振荡(见图 4.3)；而当时滞为 18 s 时，系统出现发散(见图 4.4)。采用算法 4.3，可以求得时滞为 30 s时，镇定控制器增益 $k_1=0.1$，$k_2=0.1$。此时控制效果如图 4.5 所示。

进而，考虑时变时滞情况，假设时变时滞 $d\in[0,50]$，采用文[116]给出的控制器 $k_1=0.3$，$k_2=0.2$，控制效果如图 4.6 所示，可见此时系统出现大幅振荡。在时滞变化率未知情况下，采用算法 4.3，可以求得一个可行的镇定控制器增益：$k_1=0.15$，$k_2=0.11$。采用 SIMULINK 仿真，可得控制效果如图 4.7 所示。由图 4.7 可见，采用算法 4.3 得到的控制器可以达到维持系统频率和区间交换功率的控制目标。

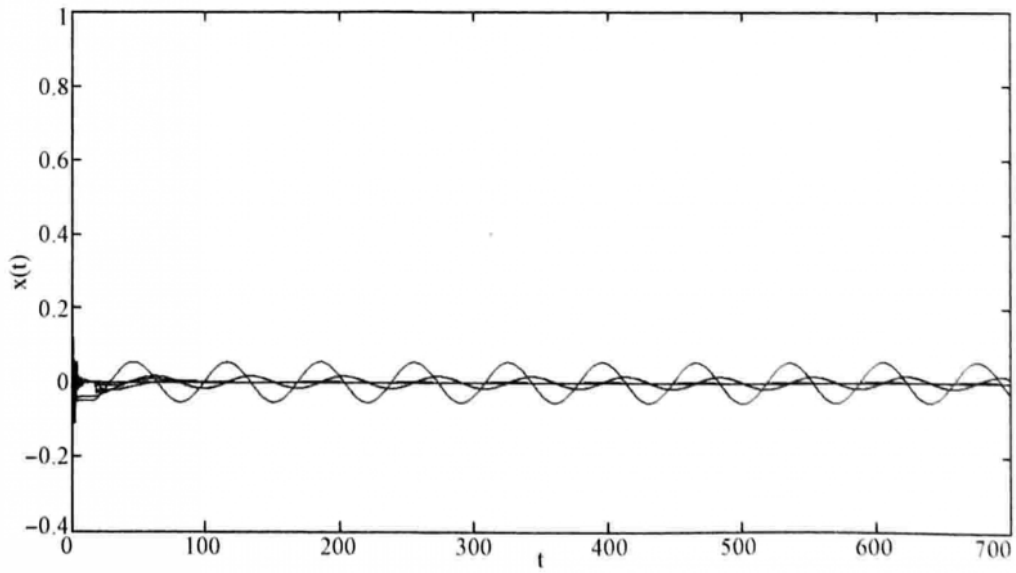


图 4.3　$d=17$ s 时系统状态

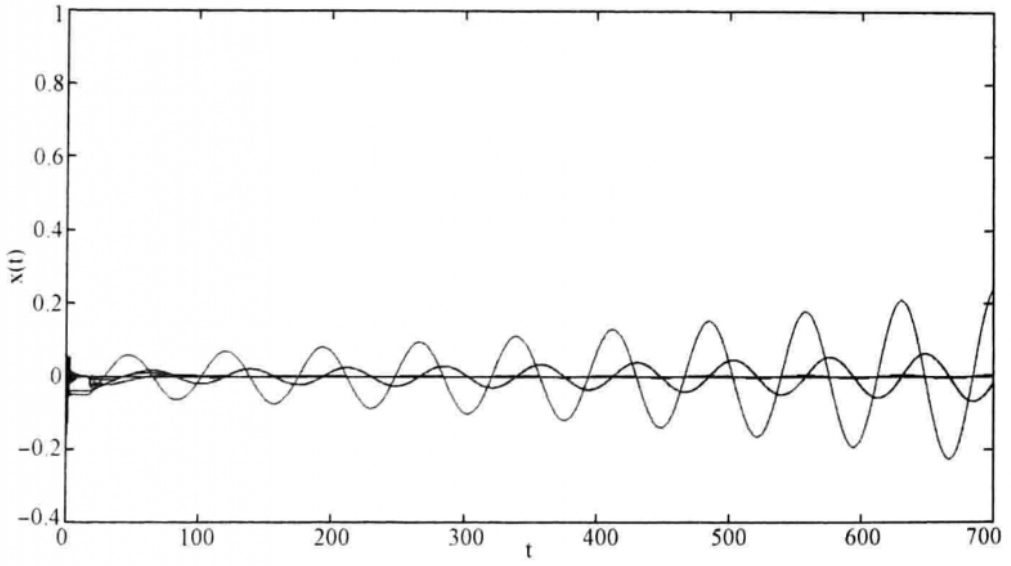


图 4.4　$d=18$ s 时系统状态

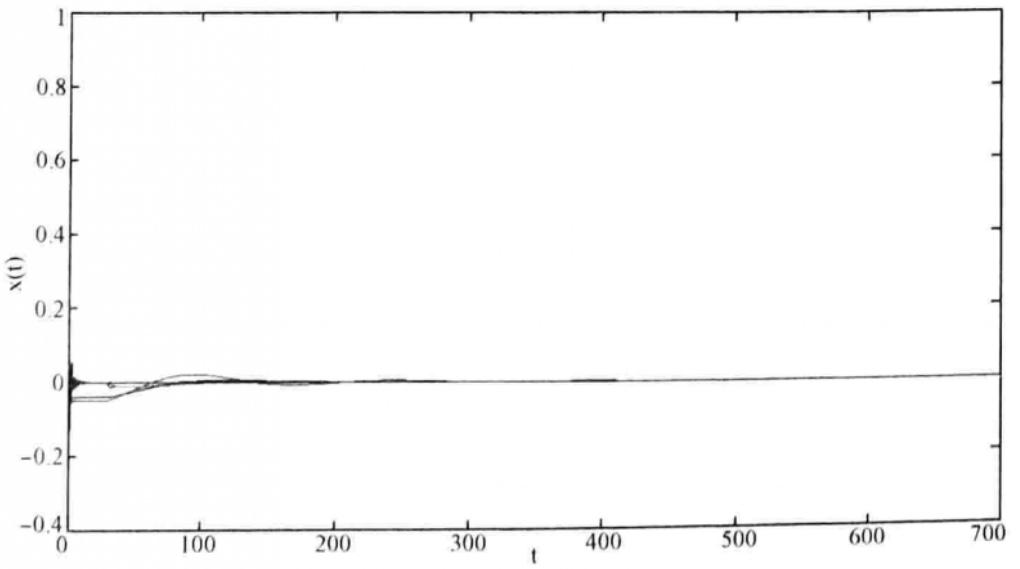


图 4.5　$d=30$ s 时系统状态

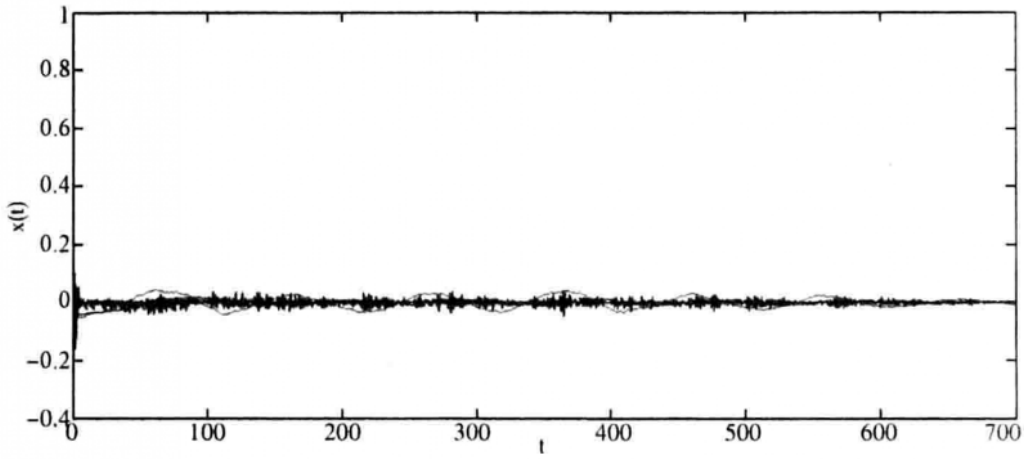


图 4.6　采用文[116]方法的原始控制效果图

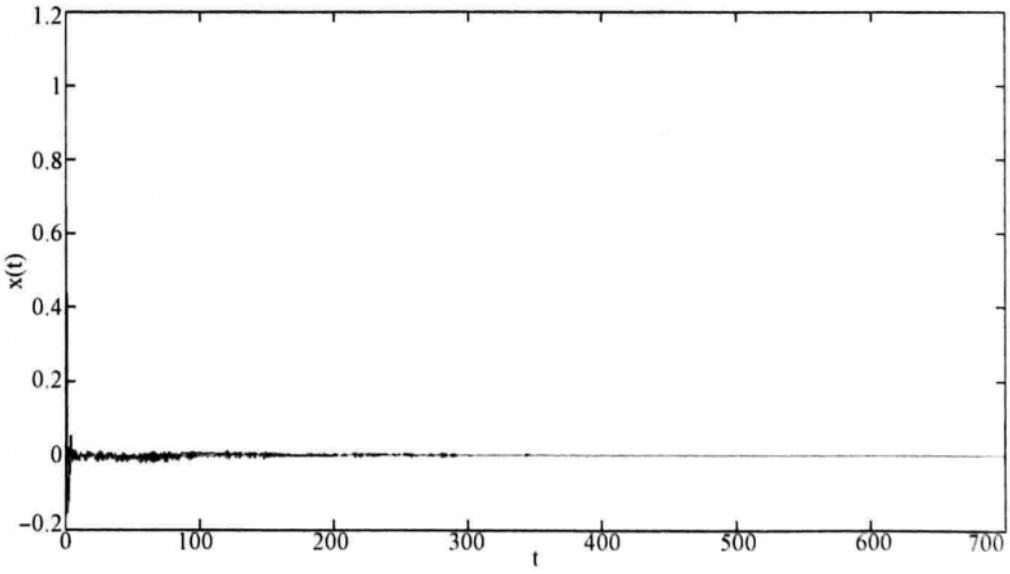


图 4.7　采用本节方法的控制效果图

第5章　时变时滞中立型系统的稳定性分析

在流量控制、电力系统等大量工程系统中，中立型泛函微分方程被用来建立系统模型[10]。近些年来，对中立型系统稳定性分析的研究成为了一个重要的研究领域。已有的稳定性判据大都针对渐近稳定性，而实际应用中常常还对系统衰减速度有明确的要求，因此有必要研究时滞系统指数稳定性问题。针对定常分立时滞(discrete delay)系统的指数稳定性分析，文[57]提出一种指数模型变换方法，随后该方法又被推广到时变分立时滞系统中[58]，但最近发现文[58]中结果存在错误[117]。对于中立系统的指数稳定性分析，已有研究还很少，其中文[118]是针对定常时滞系统，文[119]考虑了时变时滞情况，但由于需要构造特殊的含有指数的LKF，该方法要求时滞变化率小于1，从而限制了应用范围。

1944年，Lurie和Postnikov首次提出了绝对稳定性的概念，绝对稳定性理论被认为是第一个不确定非线性系统的研究方法，并被广泛地研究[120]。另一方面，在许多实际系统中，常常都会遇到时滞问题[10]。对于滞后型时滞系统的绝对稳定性问题，已有研究成果分为两类：时滞无关型[121-122]和时滞相关型[41,60-62,123-127]。时滞相关型判据由于利用了系统时滞信息，一般要比时滞无关型判据的保守性小。针对定常分立时滞系统，文[123]和文[41]分别利用自由权矩阵方法和积分不等式方法研究了绝对稳定性问题，高金凤做了进一步改进[124]。而对于时变分立时滞系统，文[60]利用积分不等式方法研究了绝对稳定性问题[60]，文[61]进一步通过保留LKF微分中的一些有用项，得到了保守性更小的结果。文[62]采用不同于文[61]的方法，也改进了文[60]的结果。但文[60-62]所得结果仍有改进的余地。相对而言，对中立型时滞系统的绝对稳定性问题的研究较少，且已有研究都是针对定

常时滞系统进行的[125-128]，目前还未见对时变时滞系统绝对稳定性的研究。

本章尝试将第 2 章中提出的基于 Finlser 引理的分析框架由分立时滞系统扩展到中立时滞系统，研究具有时变时滞的中立型系统的时滞相关指数稳定性问题和时滞相关绝对稳定性问题。

5.1 时变时滞中立型系统的指数稳定性分析

考虑一类中立型时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h_t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),t\in[-\max\{\tau,\bar{h}\},0],\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为初始状态函数；τ 和 h_t 分别为定常中立时滞和时变分立时滞，且 h_t 满足

$$0\leqslant h_t\leqslant\bar{h},\dot{h}_t\leqslant\mu, \tag{5.2}$$

其中 $\bar{h}\geqslant 0,\mu\geqslant 0$ 为常数。

在得出本节主要结果之前，需要给出如下定义。

定义 5.1[129] 如果存在标量 $\alpha>0$ 和 $\sigma\geqslant 1$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\sigma\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\boldsymbol{\phi}\|_d$$

成立，则称系统指数稳定，且具衰减率 α，其中 $\|\boldsymbol{\phi}\|_d=\sup\limits_{-\bar{h}\leqslant\theta\leqslant 0}\{\|\boldsymbol{x}(t+\theta)\|,\|\dot{\boldsymbol{x}}(t+\theta)\|\}$。

对于系统(5.1)，采用如下指数模型变换：

$$\boldsymbol{z}(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t), \tag{5.3}$$

将系统(5.1)变换为：

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t)+\tilde{\boldsymbol{B}}(\mathrm{e}^{\alpha h_t})\boldsymbol{z}(t-h_t)+\tilde{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{z}(t-\tau)+\tilde{\boldsymbol{C}}_2\dot{\boldsymbol{z}}(t-\tau), \tag{5.4}$$

其中 $\alpha>0$ 为衰减率，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$，$\tilde{\boldsymbol{B}}(\mathrm{e}^{\alpha h_t})=\boldsymbol{B}\mathrm{e}^{\alpha h_t}$，$\tilde{\boldsymbol{C}}_1=-\alpha\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\alpha\tau}$，$\tilde{\boldsymbol{C}}_2=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\alpha\tau}$。

下面由 Finsler 引理给出一个中立系统的指数稳定性判据。

定理 5.1 对于给定的 $\bar{h}\geqslant 0$ 和 $\mu\geqslant 0$，存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}_i(i=1,2,3,4)$，$\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得式(5.5)对于 $h_t\in[0,\bar{h}]$ 均成立，则系统指数稳定，且具有衰减率 α。

$$\boldsymbol{\Psi}(h_t,\mathrm{e}^{\alpha h_t})=\boldsymbol{\Xi}(h_t)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}(h_t,\mathrm{e}^{\alpha h_t})+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(h_t,\mathrm{e}^{\alpha h_t})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0 \quad (5.5)$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}(h_t)=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{V}\end{bmatrix},-(1-\mu)\boldsymbol{Q}_1,-\boldsymbol{Q}_2,-\boldsymbol{Q}_3,-\boldsymbol{Q}_4,-h_t\boldsymbol{R}_1,-(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{R}_1\right\}$$

$$-(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_5),$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}_4+\bar{h}\boldsymbol{R}_1+\tau^2\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}_3,$$

$$\boldsymbol{S}(h_t,\mathrm{e}^{\alpha h_t})=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \widetilde{\boldsymbol{A}} & \widetilde{\boldsymbol{B}}(\mathrm{e}^{\alpha h_t}) & \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{C}}_1 & \widetilde{\boldsymbol{C}}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & h_t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

证明　考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函：

$$V(\boldsymbol{z}_t)=\boldsymbol{z}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_t+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s+$$

$$\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{T}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s+\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \quad (5.6)$$

沿系统(5.4)，对 $V(z_t)$ 取微分，有

$$\dot{V}(\boldsymbol{z}_t)=2\boldsymbol{z}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{z}}_t+\dot{\boldsymbol{z}}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_4+\bar{h}\boldsymbol{R}_1+\tau^2\boldsymbol{R}_2)\dot{\boldsymbol{z}}_t+\boldsymbol{z}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}_3)\boldsymbol{z}_t$$

$$-(1-\dot{h}_t)\boldsymbol{z}_{t-h_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{z}_{t-h_t}-\boldsymbol{z}_{t-\bar{h}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{z}_{t-\bar{h}}-\boldsymbol{z}_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{z}_{t-\tau}-\dot{\boldsymbol{z}}_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{z}}_{t-\tau}$$

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s-\tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s。 \quad (5.7)$$

由 Jensen 不等式，有

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\leqslant-h_t\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{w}_1-(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{w}_2, \quad (5.8)$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}_{t-h_t})/h_t$，$\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{z}_{t-h_t}-\boldsymbol{z}_{t-\bar{h}})/(\bar{h}-h_t)$，

$$-\tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}_{t-\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}_{t-\tau})。 \quad (5.9)$$

这样根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论，如果(5.10)成立，则系统(5.4)渐近稳定，

$$\dot{V}(\boldsymbol{z}_t)\leqslant\boldsymbol{\xi}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(h_t)\boldsymbol{\xi}_t<0,\forall\boldsymbol{S}(h_t,\mathrm{e}^{\alpha h_t})\boldsymbol{\xi}_t=0, \quad (5.10)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_t=\mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{z}}_t,\boldsymbol{z}_t,\boldsymbol{z}_{t-h_t},\boldsymbol{z}_{t-\bar{h}},\boldsymbol{z}_{t-\tau},\dot{\boldsymbol{z}}_{t-\tau},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$。进而由 Finsler 引理，式(5.10)等价于式(5.5)。

下面证明条件是系统指数稳定的充分条件。若式成立，则有 $\dot{V}(\boldsymbol{z}_t)<0$，即

$$V(\boldsymbol{z}_t)\leqslant V(0)。\tag{5.11}$$

由式(5.6)，有

$$\begin{aligned}V(0)\leqslant{}&\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{z}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_0+[\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_1)+\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_2)]\int_{t-\bar{h}}^{t}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s+\\&\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_3)\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{z}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}s+\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_4)\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s+\\&\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_1)\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_2)\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{z}}_s^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\\leqslant{}&\sigma_{\max}\|\boldsymbol{\phi}\|_d^2,\end{aligned}\tag{5.12}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}={}&\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\bar{h}[\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_1)+\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_2)]+\\&\tau[\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_3)+\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_4)]+\\&\frac{\bar{h}^2}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_1)+\frac{\tau^3}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_2)。\end{aligned}$$

另一方面，

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})e^{2\alpha t}\|\boldsymbol{x}_t\|^2\leqslant\boldsymbol{z}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_t\leqslant V(\boldsymbol{z}_t),\tag{5.13}$$

由式(5.12)和(5.13)，有

$$\|\boldsymbol{x}_t\|\leqslant\sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}}e^{-\alpha t}\|\boldsymbol{\phi}\|_d。\tag{5.14}$$

根据定义 5.1，式(5.14)表明系统(5.1)指数稳定，且具有衰减率 α。证毕。

注 5.1 定理 5.1 给出了系统(5.1)的指数稳定性判据，但是由于在式(5.5)中时变时滞 $h(t)$ 以指数形式出现，使得式(5.5)本质上是一个指数参数相关 LMI。目前对于指数参数相关 LMI 还无法直接求解，这造成了时变时滞系统指数稳定性分析的根本困难。为了克服这个问题，考虑采用多胞覆盖技术，将式(5.5)转化为一个多仿射参数相关 LMI。而根据鲁棒控制理论，多仿射参数相关 LMI 的可行性等价于其对应的多胞型不确定性系统的顶点的可行性，从而可以利用已有的 LMI 求解算法有效求解。

图 5.1 中为多胞覆盖技术示意图，图中线段 AC、BC 和 HI 分别为指数函数 $e^{\alpha h(t)}$ 在 A 点、B 点和 G 点的切线。由图 5.1 可见，多胞覆盖技术就是用一个凸多边形覆盖指数函数 $e^{\alpha h(t)}$ 在点 A 和 B 之间的曲线，从而可以通过检验这个凸多边形的顶点的可行性来近似求解式(5.5)。需要说明的是，由于凸多边形所代表的参数变换范围大于指数函数 $e^{\alpha h(t)}$ 所具有的参数变换范围，所以多胞覆盖技术会不可避免地带来保守性，并且保守性会随凸多边形面积的增大而增大。图 5.1 中给出了几种可能的三角形覆盖 ABC、ABD、ABE 和 ABF 以及四边形覆盖 $AHIB$，从中可以看出四边形覆盖 $AHIB$ 的保守性最小，三角形覆盖 ABC 次之，而三角形覆盖 ABF 的保守性最大。

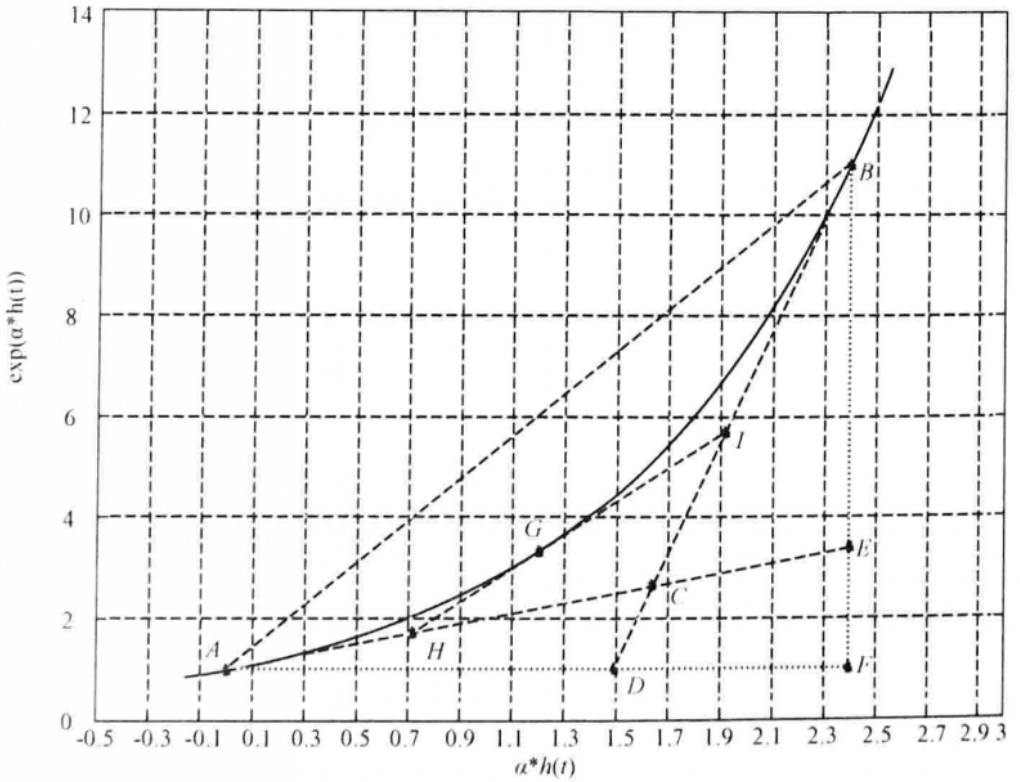


图 5.1　指数函数 $e^{\alpha h(t)}$ 的凸多边形覆盖

总结以上讨论，系统(5.1)指数稳定性的 LMI 判据可以归结为以下定理。

定理 5.2　对于给定的 $\bar{h} \geqslant 0$ 和 $\mu \geqslant 0$，存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，

$\boldsymbol{Q}_i(i=1,2,3,4)$，$\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得式(5.18) 或者式(5.15) ～(5.19) 成立，则系统指数稳定，且具有衰减率 α。

$$\Psi(0,1)<0, \tag{5.15}$$

$$\Psi(\bar{h},\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}})<0, \tag{5.16}$$

$$\Psi(\theta_1,\theta_2)<0, \tag{5.17}$$

$$\Psi(\theta_3,\theta_4)<0, \tag{5.18}$$

$$\Psi(\theta_5,\theta_6)<0, \tag{5.19}$$

其中 (θ_1,θ_2)、(θ_3,θ_4)对应于顶点 H 和 I，(θ_5,θ_6)对应于顶点 C、D、E 或 F，分别取为

顶点 H：

$$(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1+(\alpha\bar{h}/2-1)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}}{(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}-1)},\frac{1+(\alpha\bar{h}/2-1)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}}{(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}-1)}+1\right),$$

顶点 I：

$$(\theta_3,\theta_4)=\begin{bmatrix}\dfrac{(1-\alpha\bar{h}/2)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}-(1-\alpha\bar{h})\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}}{(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}-\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2})}, \\ \mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}\left[\dfrac{(1-\alpha\bar{h}/2)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2}-(1-\alpha\bar{h})\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}}{(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}-\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}/2})}\right]+\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}} \\ -\alpha\bar{h}\end{bmatrix},$$

顶点 C：$(\theta_5,\theta_6)=\left(\dfrac{1+(\alpha\bar{h}-1)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}}{\alpha(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}-1)},\dfrac{1+(\alpha\bar{h}-1)\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}}{(\mathrm{e}^{\alpha\bar{h}}-1)}+1\right)$，

顶点 D：$(\theta_5,\theta_6)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\bar{h}}-1+\alpha\bar{h}}{\alpha},1\right)$，

顶点 E：$(\theta_5,\theta_6)=(\bar{h},\alpha\bar{h}+1)$，

顶点 F：$(\theta_5,\theta_6)=(\bar{h},1)$。

下面通过两个算例来检验本节提出方法的有效性。

例 5.1 考虑一个时滞系统，参数如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\tau=0。$$

假设 $\mu=0.2$，对于不同的衰减率 α，求解定理 5.2 可以得到保证该系统指数稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$(见表 5.1)。由表 5.1 可见，四边形

覆盖 $AHIB$ 具有最大的 $\bar{h}_{\max}$，三角形覆盖 ABC 次之，ABF 最小，这与注 5.1 中的论述相符合。但是也要注意到四边形覆盖 $AHIB$ 和三角形覆盖 ABC 的保守性相差微小，这是由于随着多边形覆盖的缩小，多胞覆盖技术所引起的保守性也逐渐缩小，而四边形覆盖 $AHIB$ 和三角形覆盖 ABC 已经接近极限。实际上，仅仅在式(5.15) 和式(5.16) 的约束下，求解定理 5.2 所得结果与四边形覆盖 $AHIB$ 完全相同，这说明四边形覆盖 $AHIB$ 已经完全消除了由多胞覆盖技术所引起的保守性。

表 5.1　对于不同衰减率 α 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

多边形覆盖	衰减率 α						
	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1.5	1.7
$AHIB$	1.847	1.452	0.980	0.776	0.690	0.547	0.502
ABC	1.847	1.452	0.980	0.776	0.690	0.546	0.501
ABD	1.847	1.452	0.980	0.776	0.690	0.536	0.487
ABE	1.841	1.451	0.978	0.749	0.686	0.542	0.494
ABF	1.841	1.447	0.970	0.729	0.670	0.515	0.460

例 5.2　考虑一个中立系统(5.1)，参数如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}。$$

假设 $\tau=1$ 和 $\mu=0.2$，对于不同的衰减率 α，求解定理 5.2 可以得到保证该系统指数稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$（见表 5.2）。由表 5.2 可见，随着衰减率 α 的增大，最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 随之减小，这符合最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 与对衰减率 α 的性能要求之间的矛盾。

表 5.2　对于不同衰减率 α 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

α	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1.2
$\bar{h}_{\max}$	4.718	1.359	0.909	0.695	0.579	0.461

5.2 时变时滞中立型系统的绝对稳定性分析

考虑一类具有扇区有界非线性的不确定中立型时滞系统[130]：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})x(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})x(t-h_t)+\\ \qquad(\boldsymbol{C}+\Delta\boldsymbol{C})\dot{x}(t-\tau)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t-h(t)),\\ \boldsymbol{\omega}(t)=-\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),t\in[\bar{h},0],\end{cases} \tag{5.20}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$，$w(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^p$ 分别是状态、输入和输出向量；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为初始状态函数；$\tau>0$ 为定常中立时滞；h_t 为时变分立时滞，满足 $0\leqslant h_t\leqslant\bar{h},\dot{h}_t\leqslant\mu$，其中 $\bar{h}\geqslant 0,\mu\geqslant 0$ 为常数。$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 为已知实矩阵，$\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B}$ 和 $\Delta\boldsymbol{C}$ 描述系统参数不确定性，满足

$$[\Delta\boldsymbol{A}\quad\Delta\boldsymbol{B}\quad\Delta\boldsymbol{C}]=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{E}_1\quad\boldsymbol{E}_2\quad\boldsymbol{E}_3], \tag{5.21}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}_i$(i=1,2,3)为已知定常实矩阵，$\boldsymbol{F}(t)$ 为时变矩阵，且满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant I$。

$\boldsymbol{\phi}(t,z(t))$ 为分段连续的非线性函数，对 $z(t)$ 是全局 *Lipschitz* 的，且满足 $\boldsymbol{\phi}(t,0)=0$ 以及如下扇区条件：

$$[\boldsymbol{\phi}(t,z(t))-\boldsymbol{K}_1z(t)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\phi}(t,z(t))-\boldsymbol{K}_2z(t)]\leqslant 0, \tag{5.22}$$

其中 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 为已知的定常实矩阵，且满足 $\boldsymbol{K}_1-\boldsymbol{K}_2>0$，一般称 $\boldsymbol{\phi}(t,z(t))$ 属于扇区 $[\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2]$。

中立型时滞系统的绝对稳定性定义可见文[128]。下面引入中立型时滞系统鲁棒稳定的定义。

定义 5.2 如果对于满足(5.22)的任意非线性函数和任意容许不确定性(5.21)，系统(5.20)均是全局渐近稳定的，则称其鲁棒稳定。

下面给出本节的主要结果。

首先，不计系统(5.20)中的不确定性，考虑如下标称系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h_t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t-h_t),\\ \boldsymbol{\omega}(t)=-\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),t\in[\bar{h},0],\end{cases}\tag{5.23}$$

其中，非线性函数 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}(t))$ 属于扇区 $[\boldsymbol{0},\boldsymbol{K}]$，此时有

$$\boldsymbol{\phi}^{T}(t,\boldsymbol{z}(t))[\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}(t))-\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(t)\leqslant 0]。\tag{5.24}$$

为了保证系统(5.23)的解的存在性和唯一性，需要如下假设：

假设 5.1　系统(5.23)中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的所有特征值都在单位圆内，即 $\|\boldsymbol{C}\|<1$。

定理 5.3　如果系统(5.23)满足假设 5.1，并且存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Z}_j,(i=1,2,3,4,j=1,2,3)$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 以及标量 $\varepsilon>0$，使得式(5.25)对于 $h_t=0$ 和 ρ_1，式(5.26)对于 $h_t=\rho_1$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则对于属于 $[\boldsymbol{0},\boldsymbol{K}]$ 的非线性函数 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}(t))$，系统(5.23)是绝对稳定的。

$$\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}_1(h_t)+\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}<0,\tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}_2(h_t)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}<0,\tag{5.26}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)&=\boldsymbol{\Xi}_0-(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-h_1\rho_1\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_{10}\\&\quad-(\rho_1-h_1)\rho_1\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_{11},\\ \boldsymbol{\Xi}_2(h_t)&=\boldsymbol{\Xi}_0-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)-(h_1-\rho_1)\rho_1\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_{10}\\&\quad-(\bar{h}-h_t)\rho_1\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_{11},\\ \boldsymbol{\Xi}_0&=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_1+\mathrm{sym}\{\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1\}+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3+\\&\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}-\\&\quad\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\boldsymbol{e}_8-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_6)-2\varepsilon\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_9-\\&\quad\mathrm{sym}\{\varepsilon\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{K}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3)\},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}_1(h_t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-h_t\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-(\rho_1-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_2(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(h_t-\rho_1)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}_8+\rho_1{}^2\boldsymbol{Z}_1+\rho_1{}^2\boldsymbol{Z}_2+\rho_2{}^2\boldsymbol{Z}_3$，$\rho_1=\bar{h}/2$，$\rho_2=\tau/2$。

证明　考虑如下 LKF：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-h_t}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho_1}^{t}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_1\mathrm{d}s+\int_{t-\rho_2}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{\eta}_2\mathrm{d}s+$$
$$\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\rho_1\int_{-\rho_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+$$
$$\rho_1\int_{-h}^{-\rho_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\rho_2\int_{-\rho_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\tag{5.27}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho_1}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s\\ \boldsymbol{x}_{s-\rho_2}\end{bmatrix}$。

沿系统(5.23)，对 $V(\boldsymbol{x})$ 取微分，有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}-(1-\mu)\boldsymbol{x}_{t-h_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_{t-h_t}+\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\zeta}_1+$$
$$\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{\zeta}_2-\dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau}+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{x}}-$$
$$\rho_1\int_{t-\rho_1}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\rho_1\int_{t-h}^{t-\rho_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\rho_2\int_{t-\rho_2}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s,\tag{5.28}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\rho_1}\\ \boldsymbol{x}_{t-\bar{h}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\zeta}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{t-\rho_2}\\ \boldsymbol{x}_{t-\tau}\end{bmatrix}$。

由 Jensen 不等式，有

$$-\rho_2\int_{t-\rho_2}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s ds\leqslant-\boldsymbol{\xi}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_6)\boldsymbol{\xi}_t\tag{5.29}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_t=\mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{t-h_t},\boldsymbol{x}_{t-\rho_1},\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}},\boldsymbol{x}_{t-\rho_2},\boldsymbol{x}_{t-\tau},\dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau},\boldsymbol{\omega}\}$。

下面根据 h_1 的大小，分两种情况进行讨论：

(1)当 $0\leqslant h_1\leqslant\rho_1$ 时，由 Jensen 不等式，有

$$-\rho_1\int_{t-\bar{h}}^{t-\rho_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s ds\leqslant-\boldsymbol{\xi}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)\boldsymbol{\xi}_t,\tag{5.30}$$

$$-\rho_1\int_{t-\rho_1}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s ds\leqslant-h_t\rho_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{w}_1-(\rho_1-h_t)\rho_1\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{w}_2,\tag{5.31}$$

其中 $w_1 = (x - x_{t-h_t})/h_t, w_2 = (x_{t-h_t} - x_{t-\rho_1})/(\rho_1 - h_t)$。

又由式(5.24),有

$$-2w^T[w + K(Mx + Nx_{t-h_t})] \geqslant 0。 \tag{5.32}$$

将式(5.28)(5.23)～代入(5.27),并根据 Lyapunov-Krosovskii 稳定性理论和引理 1.3(S-procedure)[69],可得系统(5.23)的稳定性条件为

$$\dot{V}(x) \leqslant \zeta_1^{\mathrm{T}} \Xi_1(h_t)\zeta_1 < 0, \forall S_1(h_t)\zeta_1 = 0 \tag{5.33}$$

其中 $\zeta_1 = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x_{t-h_t}, x_{t-\rho_1}, x_{t-\bar{h}}, x_{t-\rho_2}, x_{t-\tau}, \dot{x}_{t-\tau}, \omega, w_1, w_2\}$。进而,由 Finsler 引理有,式(5.33)等价于(5.25)。

(2)当 $\rho_1 \leqslant h_1 \leqslant \bar{h}$ 时,由 Jensen 不等式,有

$$-\rho_1 \int_{t-\rho_1}^{t} \dot{x}_s^{\mathrm{T}} Z_1 \dot{x}_s ds \leqslant -\xi_t^{\mathrm{T}} (e_2 - e_4)^{\mathrm{T}} Z_1 (e_2 - e_4)\xi_t, \tag{5.34}$$

$$-\rho_1 \int_{t-\bar{h}}^{t-\rho_1} \dot{x}_s^{\mathrm{T}} Z_2 \dot{x}_s ds \leqslant -(h_t - \rho_1)\rho_1 w_3^{\mathrm{T}} Z_2 w_3 - (\bar{h} - h_t)\rho_1 w_4^{\mathrm{T}} Z_2 w_4, \tag{5.35}$$

其中 $w_3 = (x_{t-\rho_1} - x_{t-h_t})/(h_t - \rho_1), w_4 = (x_{t-h_t} - x_{t-\bar{h}})/(\bar{h} - h_t)$。

相似于情况(1),可得系统(5.23)的稳定性条件为

$$\dot{V}(x) \leqslant \zeta_2^{\mathrm{T}} \Xi_2(h_t)\zeta_2 < 0, \forall S_2(h_t)\zeta_2 = 0, \tag{5.36}$$

其中 $\zeta_2 = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x_{t-h_t}, x_{t-\rho_1}, x_{t-\bar{h}}, x_{t-\rho_2}, x_{t-\tau}, \dot{x}_{t-\tau}, \omega, w_3, w_4\}$。进而,由 Finsler 引理有,式(5.36)等价于(5.26)。

这样如果(5.26)均成立,则对于 $t>0$,均有 $\dot{V}(x)<0$,即可以保证系统(5.23)的绝对稳定性。　　证毕。□

注 5.2　定理 5.3 中所使用的 LKF(5.27),将系统分立时滞 $0 \leqslant h_t \leqslant \bar{h}$ 和中立时滞 τ 都分解成相等的两个区间,并分别设定了不同的 Lyapunov 矩阵 $Z_i(i=1,2,3)$。另外,式(5.27)中第 3 项和第 4 项包含了不同区间的交叉信息。这都使得定理 5.3 减少了所得判据的保守性,从而改进了文[60-62]的结果。

注 5.3　定理 5.3 中所使用的时滞分解的方法,可以进一步推广到分解区间数目大于 2 的情况,但随着分解区间数目的增加,所涉及的 LMI 的维数也将增长,计算负担将增大。并且随着分解区间数目的增加,时滞分解所带来的减小保守性的效果将逐步减弱。一般而言,小于

4 的分解区间数目即可满足要求。

下面，进一步将标称系统(5.23)的非线性函数推广到属于扇区$[\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]$的情况。应用文[131]中的回路变换方法，可得如下等价系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) + \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}(t-h_t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau) + \boldsymbol{D}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t-h_t), \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = -\widetilde{\boldsymbol{\phi}}(t, \boldsymbol{z}(t)), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [\bar{h}, 0], \end{cases} \tag{5.37}$$

其中$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t, \boldsymbol{z}(t))$满足$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(t, \boldsymbol{z}(t))[\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t, \boldsymbol{z}(t)) - \widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{z}(t)] \leqslant 0$，且$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_1$。$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{M}, \widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{N}$。

考虑系统(5.37)，在定理 5.3 的基础上可得如下结果。

定理 5.4 如果系统(5.23)满足假设 5.1，并且存在适维正定矩阵$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}_i, \boldsymbol{z}_j, (i=1,2,3,4, j=1,2,3)$和矩阵$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$以及标量$\varepsilon > 0$，使得式(5.38)对于$h_t = 0$和$\rho_1$，式(5.39)对于$h_t = \rho_1$和$\bar{h}$均成立，则对于属于$[\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]$的非线性函数$\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}(t))$，系统是绝对稳定的。

$$\hat{\boldsymbol{\Xi}}_1(h_t) + \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{S}}_1(h_t) + \hat{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}} < 0, \tag{5.38}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Xi}}_2(h_t) + \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{S}}_2(h_t) + \hat{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}} < 0。 \tag{5.39}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_0 = {} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{sym}\{\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1\} + \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2 - (1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_3 + \\ & \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_4 \\ \boldsymbol{e}_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_4 \\ \boldsymbol{e}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_6 \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_6 \\ \boldsymbol{e}_7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_6 \\ \boldsymbol{e}_7 \end{bmatrix} - \boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4\boldsymbol{e}_8 - (\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_6) - 2\varepsilon\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_9 - \\ & \mathrm{sym}\{\varepsilon\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_1)(\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_1(h_t) = {} & \hat{\boldsymbol{\Xi}}_0 - (\boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_5) - h_t\rho_1\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_{10} - \\ & (\rho_1 - h_t)\rho_1\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{e}_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_2(h_t) = {} & \hat{\boldsymbol{\Xi}}_0 - (\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4) - (h_t - \rho_1)\rho_1\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_{10} - \\ & (\bar{h} - h_t)\rho_1\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{e}_{11}, \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}_1(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \widetilde{\boldsymbol{A}} & \widetilde{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -h_t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(\rho_1-h_t)\boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}_2(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \widetilde{\boldsymbol{A}} & \widetilde{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(h_t-\rho_1)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -(\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I} \end{bmatrix}。$$

下面考虑系统(5.20)的鲁棒稳定性，为了保证系统(5.20)的解的存在性和唯一性，需要如下假设：

假设 5.2　系统(5.20)满足 $\| \boldsymbol{C}+\boldsymbol{HF}(t)\boldsymbol{E}_3 \| <1$。

注 5.4　假设 5.2 是系统(5.20)鲁棒稳定的必要条件，其等价于：存在 $\gamma>0$，使得 LMI(5.40)成立。

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} \\ * & * & -\gamma\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0, \tag{5.40}$$

进而用 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{HF}(t)\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{HF}(t)\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{HF}(t)\boldsymbol{E}_3$ 分别代替式(5.38)和(5.39)中的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$，可由引理 1.2 得到如下的系统(5.20)鲁棒稳定性判据。

定理 5.5　系统(5.20)满足假设 5.2，如果存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}_i$，$\boldsymbol{Z}_j$，$(i=1,2,3,4,j=1,2,3)$和矩阵 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，以及标量 $\varepsilon>0$，$\lambda>0$，使得式(5.41)对于 $h_t=0$ 和 ρ_1，式(5.42)对于 $h_t=\rho_1$ 和 $\bar{h}$ 均成立，则系统(5.20)是鲁棒稳定的。

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_1(h_t)+\boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{S}}_1(h_t)+\hat{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}+\lambda\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}} & \boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{H}} \\ * & -\lambda\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0, \tag{5.41}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_2(h_t)+\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{S}}_2(h_t)+\hat{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}+\lambda\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}} & \boldsymbol{X}\bar{\boldsymbol{H}} \\ * & -\lambda\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0, \tag{5.42}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{H}}=\mathrm{col}\{\boldsymbol{H},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\}$，$\bar{\boldsymbol{E}}=[\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{E}_1\ \boldsymbol{E}_2\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{E}_3\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}]$。

下面通过数值算例验证本节提出方法的有效性。

例 5.3 考虑不确定系统(5.20)，参数如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{M}=[0.3\quad 0.1]$，$\boldsymbol{N}=[0.1\quad 0.2]$，$\boldsymbol{K}_1=0.2$，$\boldsymbol{K}_2=0.5$，$\boldsymbol{H}=0.1\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{E}_3=0$，$\tau=0$。

对于不同的 μ，保证该系统鲁棒稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 在表 5.3 中给出。由表 5.3 可以看出，本节提出的方法可以得到比文[60-62]更大的 $\bar{h}_{\max}$，从而说明了本节提出的方法比文[60-62]具有更小的保守性。

表 5.3 对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

μ	0	0.3	0.6	0.9	1
文[60]	3.3057	2.0787	1.4195	0.9228	0.7638
文[61]	3.3057	2.2262	1.7409	1.4682	1.4383
文[62]	3.3057	2.2262	1.7409	1.4682	1.4383
定理 5.5	3.7324	2.3822	1.8199	1.6690	1.6635

例 5.4 考虑一个不含不确定性的中立型系统，参数如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0.05 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_1=0.2\boldsymbol{I},\boldsymbol{K}_2=0.5\boldsymbol{I}。$$

假设 $\tau=1$，对于不同 μ，保证该系统绝对稳定的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$ 在表 5.4 中给出。可见随着 μ 的增大，$\bar{h}_{\max}$ 递减，这反映了时变时滞的变化率对系统稳定性的影响。

表 5.4 对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$

μ	0	0.1	0.3	0.6	0.9	1
定理 5.4	3.5675	3.0692	2.4044	1.9078	1.8327	1.8311

第 6 章　时滞 Markov 跳变系统的稳定性和有界实分析

工程和经济领域中的大量系统，例如：制造系统、气象预报系统、电力系统、生化系统以及经济系统等，在其运行过程中常常会遭受环境的突然变化、系统内部连接方式的改变、非线性对象工作点范围的变化以及系统部件的损坏和人为干预等突发影响。这类系统状态的演化受到时间和事件两种机制的共同驱动，被称为混杂系统(Hybrid Systems)。

切换系统(Switched Systems)是混杂系统中的一个重要类型，其特定是：系统模态有限，具有某种切换规则，在切换瞬间系统状态不发生跳变。其实，“切换”作为一种控制思想很早就已经出现，例如：为解决非线性系统出现的周期性震荡，特别是伺服系统的稳定问题，所提出的开关控制方法(也称为“Bang-bang 控制”)。由于其中采用继电器作为切换开关，又称为继电控制。后来，受到分析继电控制系统的相平面方法的启发，建立和发展起来的一类新的控制方法：变结构控制(Variable structure control)和滑模控制(Sliding mode control)。甚至模糊控制也可以看作一种切换控制，只是模糊控制可以实现各个子控制器之间的平滑过渡，是一种“软切换”。还有，作为模糊控制的一种推广，多模型自适应控制，也是采用切换控制的思想。

Markov 跳变系统(Markovian jump system)，是一种特殊的切换系统。Markov 跳变系统的特点是其从一个模态到另一个模态的切换没有固定的切换规则，而是随机切换的，且这种随机切换符合一定的统计规律——服从 Markov 随机过程。

Markov 随机过程的特点是“一步相关性”，即系统下一步将跳变至某一个模态，只与当前模态有关。例如一个 2-模态的离散 Markov 跳变系统的模态转移矩阵为：

$$\begin{matrix}\text{mode 1}\\ \text{mode 2}\end{matrix}\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix},$$

这意味着如果系统当前处于模态 1，则其以 30%的概率保持处于模态 1，而以 70%的概率跳变至模态 2；如果系统当前处于模态 2，则其以 80%的概率保持处于模态 2，而以 20%的概率跳变至模态 1。

由于切换的引入，系统的动态特性会发生根本的变化。比如一个 2-模态连续时间 Markov 跳变线性系统，参数为：

$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1 & 10\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -10 & -1\end{bmatrix}$，转移速率矩阵为$\begin{bmatrix}-\pi & \pi\\ \pi & -\pi\end{bmatrix}$。

可见两个子模态均是稳定的，但是根据基本稳定性判据：$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}\boldsymbol{P}_j<0$，可以判定整个系统却是不稳定的。

另一方面，切换也增加了有效的控制手段，适当的使用模态切换，可以达到比单一模态更为优越的控制效果。两个不稳定的系统在切换作用下也可能变得稳定。比如一个 2-模态系统，参数为：

$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，转移速率矩阵为$\begin{bmatrix}-\pi & \pi\\ \pi & -\pi\end{bmatrix}$。

两个系统均具有不稳定特征根 1，故均不稳定。但是根据基本稳定性判据，却可以判定整个系统是稳定的。由上面两个例子可以看出，模态切换给系统的稳定性带来了很大的变化。

常采用的 Markov 跳变系统稳定性分析方法有：单 Lyapunov 函数方法，多 Lyapunov 函数方法、停留时间法、平均停留时间法等。

近年来，Markov 跳变系统的分析和综合得到了广泛研究[132-134]。另一方面，时滞现象普遍存在于生物、经济、通信等众多工程领域中。因此，时滞 Markov 跳变系统的分析和设计问题引起了大量关注。文[135-137]针对均方随机稳定性、指数稳定性和 H_∞ 滤波分别给出了时滞无关结果。时滞相关结果具有更小的保守性，因此更具研究意义。对于定常时滞系统，文[138]基于中立模型变换提出一种时滞相关稳定性判据，但是由于引入了额外特征值，变换后的系统不再等价于原系统。文[139-141]分别采用不同的模型得到了保守性更小的结果。文

[142]中通过引入自由变量，减少了由模型变换引起的保守性。文[143]使用时滞分解方法得到了保守型更小的结果。但是，具有时变时滞的 Markov 跳变系统的稳定性判据相对较少，而对于区间时变时滞的结果就更为缺少。众所周知，自然界和工程中存在一些系统对于一些非零时滞是稳定的。但当无时滞时会变得不稳定，这时，如果非零时滞存在时变扰动，就有必要考虑区间时变时滞系统的稳定性。另一种典型的区间时滞系统是网络控制系统。最近，文[64-66]采用自由权方法得到了一些时变时滞的 Markov 跳变系统稳定性判据，但是文[64-66]仍然存在一些有待改进的余地。特别是在估计 LKF 弱微分的上界时，文[64]忽略了积分项 $-\int_{t-\bar{h}}^{t-ht}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}s\,\mathrm{d}s$，文[65]将 ht 放大为 $\bar{h}$，文[66]中 $\bar{h}-h_t$ 和 $h_t-\bar{h}$ 均被放大为 $\bar{h}-h$，其中 $h\leqslant h_t\leqslant\bar{h}$。

对于离散情况，文[144-145]研究了具有模态相关时滞的 Markov 跳变系统稳定性分析和控制器设计，对于具有一般时变时滞情况，文[146]中研究了时滞相关镇定问题。另一方面，由于可以更好地描述电子电路、经济系统和电力系统等一类实际系统，广义系统的研究引起了极大的关注。与一般系统不同，当研究离散广义时滞系统的稳定性时，必须同时考虑正则性和因果性，这使得广义时滞系统的研究更加复杂[147-149]。对于定常时滞离散广义 Markov 跳变系统，文[150]研究了鲁棒 H_∞ 问题，文[151]研究了鲁棒随机稳定性和镇定问题。对于具有模态相关时滞情况，文[152]研究了鲁棒稳定性和 H_∞ 控制问题，文[153]研究了鲁棒 H_∞ 滤波问题。而对于时变时滞系统，特别是区间时变时滞系统的研究还比较少。最近，文[154-155]研究了区间时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的稳定性和镇定问题。但是，文[154-155]在推导稳定性判据的过程中，都将 $-\sum_{l=k-h_2}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 放大为 $-\sum_{l=k-d_k}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$，其中 $h_1\leqslant d_k\leqslant h_2$，这使得文[154-155]中方法的保守性较大。

时滞和系统参数的随机跳变都是生产和生活中常常遇到的现象，

本章尝试将基于 Finsler 引理的分析框架，引入到时滞 Markov 跳变系统的分析中。其中，6.1 节和 6.2 节分别针对连续时间 Markov 跳变系统和离散时间广义 Markov 跳变系统。

6.1 连续时间区间时滞 Markov 跳变系统的稳定性和有界实分析

6.1.1 系统描述和预备引理

考虑如下 Markov 跳变系统[156]：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-h_t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{\omega}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{C}_{di}\boldsymbol{x}(t-h_t)+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{\omega}(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),t\in[-\bar{h},0],\end{cases}\tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^r$ 分别是系统的状态和输出向量；$\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbf{R}^q$ 为 $L_2[0,\infty)$ 上的扰动输入，$L_2[0,\infty)$ 代表平方可积向量函数空间。$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为连续初始函数；$r_t=r(t)$ 为系统模态，是取值于有限集合 $=\{1,\cdots,s\}$ 上的齐次 Markov 过程，其转移概率为 $\mathrm{P}[r_{t+h}=j\mid r_t=i]=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h), & i\neq j\\ 1+\pi_{ii}h+o(h), & i=j\end{cases}$。其中 π_{ij} 是从模态 i 到模态 j 的转移速率，当 $i\neq j$ 时，$\pi_{ij}>0$，并有 $\pi_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h}=0$。

h_t 为区间时变时滞，满足

$$\underline{h}\leqslant h_t\leqslant\bar{h},\dot{h}_t\leqslant\mu,\tag{6.2}$$

其中 $0\leqslant\underline{h}\leqslant\bar{h}$，$\mu\geqslant 0$。为了简化叙述，将 $\boldsymbol{A}(r_t=i)$ 记为 $\boldsymbol{A}_i$，其它矩阵类推。

定义 6.1[134] 如果对于任意 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 和 $r_0\in\mathbf{S}$ 有

$$E\left\{\int_0^\infty\|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\phi}(t),r_0)\|^2\mathrm{d}t\right\}<\infty\tag{6.3}$$

成立，则称标称系统(6.1)($F(t)=0$)为均方渐近稳定的，简称渐近稳

定。其中 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数，$E\{\cdot\}$ 表示数学期望。

定义 6.2　如果对于任意 $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$，系统随机稳定且在零初始条件下 $[\boldsymbol{\phi}(t)=0]$ 满足：$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \boldsymbol{z}^T(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t\right]\leqslant\gamma^2\left[\int_0^\infty \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t\right](\gamma>0)$，则称系统(6.1)具有 H_∞ 性能 γ。

6.1.2　主要结果

利用 Finsler 引理，可以得到如下结论。

定理 6.1 对给定的 h，$\bar{h}$ 和 μ，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_i>0$，$\boldsymbol{Q}_{li}>0$，$\boldsymbol{Q}_j>0$，$\boldsymbol{R}_l>0$，$\boldsymbol{X}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{X}_{2i}$ $(i\in S,\ l=1,2,3)$ 使得 LMIs(6.4)对于 $h_t=h$ 和 h_1，LMIs(6.5)对于 $h_t=h_1$ 和 $\bar{h}$ 均成立，LMIs(6.6)也成立，则系统(6.1)($\omega(t)=0$)随机稳定。

$$\boldsymbol{\Xi}_{1i}(h_t)+\boldsymbol{X}_{1i}\boldsymbol{S}_{1i}(h_t)+\boldsymbol{S}_{1i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{1i}^{\mathrm{T}}<0, \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{2i}(h_t)+\boldsymbol{X}_{2i}\boldsymbol{S}_{2i}(h_t)+\boldsymbol{S}_{2i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{2i}^{\mathrm{T}}<0, \tag{6.5}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{lj}\right)-\boldsymbol{Q}_l\leqslant 0,\ \mathrm{i}\in \mathrm{S},\ l=1,2,3, \tag{6.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Xi}_{1i}(h_t)&=\boldsymbol{\Xi}_{0i}-(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)-(h_t-h)\rho\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_7-\\
&\quad(h_1-h_t)\rho\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_8,\\
\boldsymbol{\Xi}_{2i}(h_t)&=\boldsymbol{\Xi}_{0i}-(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5)-(h_t-h_1)\rho\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{e}_7-\\
&\quad(\bar{h}-h_t)\rho\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{e}_8,\\
\boldsymbol{\Xi}_{0i}&=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\left[h^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_3)\right]\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{e}_2+\\
&\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{Q}_{1i}+h\boldsymbol{Q}_1+2\rho\boldsymbol{Q}_3\right)\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{e}_3+\\
&\quad\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q}_{1i}+\boldsymbol{Q}_{3i})\boldsymbol{e}_4+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{2i}+\rho\boldsymbol{Q}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}^{T}\boldsymbol{Q}_{2i}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}-\\
&\quad(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4),
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}_{1i}(h_t)=\begin{bmatrix}
-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_{di} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (h_t-h)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (h_1-h_t)\boldsymbol{I}
\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{2i}(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_{di} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h_t-h_1)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

$$\rho=(\bar{h}-\underline{h})/2。$$

证明 选择如下 LKF：

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}_t,i)=&\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}_t+\int_{t-\underline{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho}^{t}\boldsymbol{\zeta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{\zeta}_s\mathrm{d}s+\\ &\int_{t-h_t}^{t-\underline{h}}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\underline{h}\int_{-\underline{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\ &\rho\int_{-h_1}^{-\underline{h}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\rho\int_{-\bar{h}}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\ &\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\rho}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\zeta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\zeta}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\ &\int_{-\bar{h}}^{-\underline{h}}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \end{aligned}\tag{6.7}$$

其中 $h_1=(\underline{h}+\bar{h})/2$，$\boldsymbol{\zeta}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{s-\underline{h}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{s-h_1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

假设在 t 时刻有 $r_t=i\in S$，对 $V(\boldsymbol{x}_t,i)$ 取随机过程 $\{x_t,r_t,t\geqslant 0\}$ 的弱无穷小算子 $\mathcal{L}[\cdot]$[134]（定义为 $\mathcal{L}[V(\boldsymbol{x}_t,t,i)]=\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{T}}\left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{r_t=i}+\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}V(\boldsymbol{x}_t,t,i,j)$），则有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\boldsymbol{x}_t,t,i)\leqslant&2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\dot{\boldsymbol{x}}_t+\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{Q}_{1i}+\underline{h}\boldsymbol{Q}_1+2\rho\boldsymbol{Q}_3\Big)\boldsymbol{x}_t+\\ &\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q}_{1i}+\boldsymbol{Q}_{3i})\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}+\boldsymbol{\zeta}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{2i}+\rho\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{\zeta}_t-\boldsymbol{\zeta}_{t-\rho}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{\zeta}_{t-\rho}-\\ &(1-\dot{h}_t)\boldsymbol{x}_{t-h_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{x}_{t-h_t}+\dot{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{T}}[\underline{h}^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_3)]\dot{\boldsymbol{x}}_t-\\ &\underline{h}\int_{t-\underline{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\rho\int_{t-h_1}^{t-\underline{h}}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\rho\int_{t-\bar{h}}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\\ &\int_{t-\underline{h}}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{1j}-\boldsymbol{Q}_1\Big)\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho}^{t}\boldsymbol{\zeta}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{2j}-\boldsymbol{Q}_2\Big)\boldsymbol{\zeta}_s\mathrm{d}s+\\ &\int_{t-\bar{h}}^{t-\underline{h}}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{3j}-\boldsymbol{Q}_3\Big)\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s, \end{aligned}\tag{6.8}$$

由 Jensen 不等式，有

$$-\underline{h}\int_{t-\underline{h}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}),\tag{6.9}$$

下面，根据 h_t 的大小，分两种情况分析。

(1)如果 $\underline{h}\leqslant h_t\leqslant h_1$，由 Jensen 不等式，有

$$-\rho\int_{t-\underline{h}}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{x}_{t-h_1}-\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{x}_{t-h_1}-\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}),\tag{6.10}$$

$$-\rho\int_{t-h_1}^{t-\underline{h}}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(h_t-\underline{h})\rho\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_1-(h_1-h_t)\rho\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_2,\tag{6.11}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}-\boldsymbol{x}_{t-h_t})/(h_t-\underline{h})$，$\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{x}_{t-h_t}-\boldsymbol{x}_{t-h_1})/(h_1-h_t)$。

这样，系统(6.1)($\omega(t)=0$)随机稳定的充分条件为：式(6.6)和

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1(h_t)\boldsymbol{\xi}_1<0,\forall\boldsymbol{S}_1(h(t))\boldsymbol{\xi}_1(t)=0,\tag{6.12}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1=\mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}_t,\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}_{t-h_t},\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}},\boldsymbol{x}_{t-h_1},\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$。再利用 Finsler 引理，即可得条件(6.4)。

(2)假设 $h_1\leqslant h_t\leqslant\bar{h}$，由 Jensen 不等式，有

$$-\rho\int_{t-\bar{h}}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}-\boldsymbol{x}_{t-h_1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}-\boldsymbol{x}_{t-h_1}),\tag{6.13}$$

$$-\rho\int_{t-\bar{h}}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(h_t-h_1)\rho\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{w}_3-(\bar{h}-h_t)\rho\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{w}_4,\tag{6.14}$$

其中 $\boldsymbol{w}_3=(\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}}-\boldsymbol{x}_{t-h_t})/(h_t-\underline{h})$，$\boldsymbol{w}_4=(\boldsymbol{x}_{t-h_t}-\boldsymbol{x}_{t-h_1})/(h_1-h_t)$。

这样，系统(6.1)($\omega(t)=0$)随机稳定的充分条件为：式(6.6)和

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_2(h_t)\boldsymbol{\xi}_2<0,\forall\boldsymbol{S}_2(h)\boldsymbol{\xi}_2=0,\tag{6.15}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_2=\mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}_t,\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}_{t-h_t},\boldsymbol{x}_{t-\underline{h}},\boldsymbol{x}_{t-h_1},\boldsymbol{x}_{t-\bar{h}},\boldsymbol{w}_3,\boldsymbol{w}_4\}$。再利用 Finsler 引理，即可得条件(6.5)。

总结以上两种情况，可见对于 $t>0$，均有 $\mathcal{L}V(\boldsymbol{x}_t,t,i)<0$ 成立。由定义 6.1，系统(6.1)随机稳定。　　证毕。□

注 6.1　在定理 6.1 中，整个时变时滞区间 $[0,\bar{h}]$ 被分成了三个子区间：$[0,\underline{h}]$，$[\underline{h},h_1]$ 和 $[h_1,\bar{h}]$。然后根据时滞 $h(t)$ 是否在该子区间内，采用不同的方法处理式(6.8)中的积分项。当 $h(t)$ 不在该子

区间内时，直接采用 Jensen 不等式，而不引入自由矩阵。由于对定常时滞系统，引入自由矩阵并不能较小保守性，而只会增大计算负担。另一方面，当 $h(t)$ 在子区间内，应用 Finsler 引理引入自由矩阵，以避免文[65-66]中的放大，降低了保守性。

注 6.2 当 μ 未知时，只需将 $\boldsymbol{Q}_{3i}=0$ 和 $\boldsymbol{Q}_3=0$ 代入式(6.4)和(6.5)，即可得相应的稳定性判据。

注 6.3 下面的数值算例表明对时滞区间 $[\underline{h},\bar{h}]$ 的分解有助于得到保守性更小的结果。对区间 $[\underline{h},\bar{h}]$ 分解更多的子区间可以进一步改进结果。另一方面，时滞区间 $[0,\underline{h}]$ 的分解也有助于降低保守性。下面结合对 $[0,\underline{h}]$ 和 $[\underline{h},\bar{h}]$ 的分解，得到保守性更小的结果：

定理 6.2 对给定的 $\underline{h},\bar{h},\mu$，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_i>0,\boldsymbol{Q}_h>0,\boldsymbol{Q}_l>0,\boldsymbol{R}_l>0,\boldsymbol{X}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{X}_{2i}(i\in S,l=1,2,3)$ 使得 LMIs(6.16)对于 $h_t=\underline{h}$ 和 h_1，LMIs(6.17)对于 $h_t=h_1$ 和 $\bar{h}$ 均成立，LMIs(6.18)也成立，则系统(6.1)($\omega(t)=0$)随机稳定。

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{1i}(h_t)+\boldsymbol{X}_{1i}\bar{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)+\bar{\boldsymbol{S}}_{1i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{1i}^{\mathrm{T}}<0, \tag{6.16}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{2i}(h_t)+\boldsymbol{X}_{2i}\bar{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)+\bar{\boldsymbol{S}}_{2i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{2i}^{\mathrm{T}}<0, \tag{6.17}$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{lj}\Big)-\boldsymbol{Q}_l\leqslant 0,i\in S,l=1,2,3, \tag{6.18}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{1i}(h_t)&=\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{0i}-(\boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_7)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_7)-(h_t-\underline{h})\rho\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_8-\\
&\quad(h_1-h_t)\rho\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_9,\\
\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{2i}(h_t)&=\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{0i}-(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6)-(h_t-h_1)\rho\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{e}_8-\\
&\quad(\bar{h}-h_t)\rho\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{e}_9,\\
\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{0i}&=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}[\underline{h}^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_3)]\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{e}_2+\\
&\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j+2\rho\boldsymbol{Q}_3\Big)\boldsymbol{e}_2-(1-\mu)\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{e}_3+\\
&\quad\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{e}_5+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{1i}+\alpha\boldsymbol{Q}_1)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1i}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{e}_5\end{bmatrix}+\\
&\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{2i}+\rho\boldsymbol{Q}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_5\\ \boldsymbol{e}_6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2i}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_6\\ \boldsymbol{e}_7\end{bmatrix}-
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)\ ,$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_{di} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (h_t-\underline{h})\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (h_1-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)=$$

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_{di} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (h_t-h_1)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (\bar{h}-h_t)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\sigma=h/2,\rho=(\bar{h}-h/2)。$$

证明　选择如下 LKF：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x}_t,i)=\ &\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}_t+\int_{t-\sigma}^{t}\boldsymbol{\eta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{\eta}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\rho}^{t}\boldsymbol{\zeta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{\zeta}_s\mathrm{d}s+\int_{t-h_t}^{t-\underline{h}}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{3i}\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\\ &\sigma\int_{-\sigma}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\rho\int_{-h_1}^{-\underline{h}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\ &\rho\int_{-\bar{h}}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\sigma}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\eta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\eta}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\ &\int_{-\rho}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\zeta}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\zeta}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\bar{h}}^{-\underline{h}}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned}\tag{6.19}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{s-\sigma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。类似于定理 6.1 的推导，可证得结论。

证毕。□

下面，基于定理 6.1，容易得到系统(6.1)的时滞相关有界实。

定理 6.3　对给定的 h，$\bar{h}$，μ 和 $\gamma>0$，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_i>0$，$\boldsymbol{Q}_{li}>0$，$\boldsymbol{Q}_l>0$，$\boldsymbol{R}_l>0$，$\boldsymbol{X}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{X}_{2i}$（$i\in\mathbf{S}$，$l=1,2,3$）使得 LMIs(6.20)对于 $h_t=h$ 和 h_1，LMIs(6.21)对于 $h_t=h_1$ 和 $\bar{h}$ 均成立，LMIs(6.22)也成立，则系统(6.1)随机稳定且具 H_∞ 性能 γ。

$$\boldsymbol{\Xi}_{1i}(h_t)-\gamma^2\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_9+\boldsymbol{X}_{1i}\tilde{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)+\tilde{\boldsymbol{S}}_{1i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{1i}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_i<0\tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{2i}(h_t)-\gamma^2\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_9+\boldsymbol{X}_{2i}\tilde{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)+\tilde{\boldsymbol{S}}_{2i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{2i}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_i<0\tag{6.21}$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{lj}\Big)-\boldsymbol{Q}_l\leqslant 0,i\in\mathbf{S},l=1,2,3,\tag{6.22}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{1i}(h_t) & \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{2i}(h_t) & \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{C}_i\quad \boldsymbol{C}_{di}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{D}_i]。$$

与定理 6.3 类似，由定理 6.2，有如下保守性更低的有界实。

推论 6.1 对给定的 $\underline{h}$，$\bar{h}$，μ 和 $\gamma>0$，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_i>0$，$\boldsymbol{Q}_{li}>0$，$\boldsymbol{Q}_l>0$，$\boldsymbol{R}_l>0$，$\boldsymbol{X}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{X}_{2i}$（$i\in\mathbf{S}$，$l=1,2,3$）使得 LMIs(6.23)对于 $h_t=\underline{h}$ 和 h_1，LMIs(6.24)对于 $h_t=\underline{h}$ 和 $\bar{h}$ 均成立，LMIs(6.25)也成立，则系统(6.1)随机稳定且具 H_∞ 性能 γ。

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{1i}(h_t)-\gamma^2\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{10}+\boldsymbol{X}_{1i}\hat{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)+\hat{\boldsymbol{S}}_{1i}^{\mathrm{T}}(h_t)\boldsymbol{X}_{1i}^{\mathrm{T}}+\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i<0,\tag{6.23}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{2i}(h_t)-\gamma^2\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{10}+\boldsymbol{X}_{2i}\hat{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)+\hat{\boldsymbol{S}}_{2i}^{\mathrm{T}}(h_t)+\boldsymbol{X}_{2i}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i<0,\tag{6.24}$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_{lj}\Big)-\boldsymbol{Q}_l\leqslant 0,i\in S,l=1,2,3,\tag{6.25}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{S}}_{1i}(h_t) & \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\end{bmatrix},\ \hat{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{S}}_{2i}(h_t) & \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{C}_i\quad \boldsymbol{C}_{di}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{D}_i]。$$

本节的方法可以方便地推广到具有时变输入与状态时滞的 Markov 跳变系统鲁棒 H_∞ 控制和鲁棒保性能控制，感兴趣的读者可以参考文[157]和[158]。

另外，在研究 Markov 跳变系统时所遇到的一个特殊困难是如何进行系统仿真，特别是如何进行 Matlab/Simulink 联合仿真。关于这个问题，已有的研究常常借助 Waner S 提供的在线 Java 程序来实现[159]，该程序只能得到 Markov 跳变模态的统计结果，而无法得到跳变模态的变化轨迹，这不利于进一步进行具有随机跳变参数的动态系

统仿真。文[160]给出了离散时间 Markov 跳变系统的仿真算法。应该说离散时间 Markov 跳变系统仿真相对简单，而目前还未见关于基于 Matlab/Simulink 的具有 Markov 跳变参数的连续时间线性或非线性系统仿真算法的研究。本节的附录 A 中通过分析连续时间 Markov 链的转移率矩阵的物理意义，提出一种基于 Matlab 的连续时间 Markov 链的仿真算法，进而给出构建基于 Simulink 的含有 Markov 跳变参数的线性系统和非线性系统仿真模型的详细方法，希望感兴趣的读者能据此自行设计时滞 Markov 系统的仿真程序。

6.1.3　数值算例

例 6.1　考虑一个无扰动的 2-模态系统，参数如下：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-3.4888 & 0.8057\\ -0.6451 & -3.2684\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}-0.8620 & -1.2919\\ -0.6841 & -2.0729\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2.4898 & 0.2895\\ 1.3396 & -0.0211\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-2.8306 & 0.4978\\ -0.8436 & -1.0115\end{bmatrix},$$

$\pi_{11}=-0.1$，$\pi_{22}=-0.8$。

首先假设 $h=0$，比较定理 6.1 与文[64-66]的结果。对于不同 μ，表 6.1 给出了不同方法所能得到的最大时滞上界，由表 6.1 可以看出定理 6.1 比为文[64-66]的保守性更低。进而，由注 6.2 可得对于未知 μ 的 $\bar{h}_{\max}=0.6043$。

表 6.1　对于不同 μ 的 $\bar{h}_{\max}$

μ	0.6	0.8	1.6
文[65]的定理 1	0.4428	0.3795	0.3469
文[65]的定理 2	0.4492	0.4341	0.4314
文[64]	0.4927	0.4261	0.3860
文[66]	0.5159	0.4814	0.4789
定理 6.1	0.6169	0.6042	0.6042

接下来，假设 $\mu=0.1$。对于不同的 h，表 6.2 给出了由定理 6.1 和定

理 6.2 得到的 $\bar{h}_{\max}$。由表 6.2 可见当 $\underline{h}>0.4$ 时，由定理 6.1 得到的 $\bar{h}_{\max}$ 将减小，这反映了随着区间 $[\underline{h},\bar{h}]$ 的减小，对该区间的时滞分解的作用也逐渐减弱。而定理 6.2 可以取得比定理 6.1 保守性更低的结果，这与注 6.3 的表述相符。不同于定理 6.1，随 $\underline{h}$ 的增大，定理 6.2 得到的 $\bar{h}_{\max}$ 单调递增，这表明对于区间时变时滞，定理 6.2 更加合理有效。

表 6.2　$\mu=0.1$ 时的 $\bar{h}_{\max}$

$\underline{h}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
定理 6.1	0.6990	0.7024	0.7034	0.7035	0.6976	0.6831
定理 6.2	0.7002	0.7078	0.7180	0.7313	0.7428	0.7518

例 6.2　考虑一个受扰的 2-模态系统，参数如下：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-2.2460 & -1.4410\\ -1.5937 & -2.9289\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}-0.7098 & -1.1908\\ -0.6686 & -3.2025\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-1.8999 & 0.8156\\ 0.6900 & -0.7881\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-1.5198 & -1.6041\\ -0.1567 & -1.2427\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0.0403\\ 0.6771\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0.5689\\ -0.2556\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}-0.3775\\ -0.2959\end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}-1.4751\\ -0.2340\end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{C}_{d1}=\boldsymbol{C}_{d2}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{D}_1=0.1184,\ \boldsymbol{D}_2=0.3148,$$

$\pi_{11}=-3$，$\pi_{22}=-0.6$。

假设 $\mu=0$。由定理 6.2，可知对于任意小于 0.6129 的定常时滞，该系统均稳定。给定 $\gamma>0$，由推论 6.1，可得最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$。表 6.3 给出了对于不同 γ 的比较结果。由表 6.3，可见推论 6.1 比文[66]和[161]的结果的保守性更低。

表 6.3　对于 $\mu=0$ 的 $\bar{h}_{\max}$

γ	0.5	1	1.5	2
文[161]	0.1843	0.2019	0.2069	0.2092
文[66]	0.4156	0.4739	0.4926	0.5022
推论 5.1	0.5352	0.5722	0.5850	0.5916

假设 $\mu=0.1$，$\gamma=0.5$，由定理 6.3 和推论 6.1，可得对于不同 $\underline{h}$ 的最大时滞上界 $\bar{h}_{\max}$（见表 6.4）。由表 6.4，可见推论 6.1 比定理 6.3 的保守性更低。

表 6.4　对 $\mu=0.1$ 的 $\bar{h}_{\max}$

$\underline{h}$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
定理 6.3	0.5051	0.5098	0.5126	0.5121	0.5076
推论 6.1	0.5058	0.5117	0.5166	0.5199	0.5213

6.2　时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的稳定性分析

6.2.1　问题描述和引理

考虑一类离散广义 Markov 跳变系统[92]：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}(r_k)\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{A}_d(r_k)\boldsymbol{x}_{k-d_k}, \\ \boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\phi}_k, k=-h_2,-h_2+1,\cdots,0, \end{cases} \tag{6.26}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量；$\boldsymbol{\phi}_k$ 为初始状态函数；矩阵 $\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^n$ 奇异，且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r<n$；$\boldsymbol{A}(r_k)$，$\boldsymbol{A}_d(r_k)$ 为适当维数的模态相关定常系统矩阵；模态 r_k 是取值于有限集合 $\mathcal{S}=\{1,\cdots,s\}$ 上的齐次 Markov 过程，从模态 i 到模态 j 的转移概率为 $\pi_{ij}=\Pr\{r_{k+1}=j\mid r_k=i\}$，其中 $\pi_{ij}\geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}=1$。d_k 为区间时变时滞，满足 $h_1\leqslant d_k\leqslant h_2$，其中 h_1 和 h_2 为已知非负整数。

定义 6.3　考虑系统

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}_{k-d_k}, \tag{6.27}$$

对于任意 $i\in\mathcal{S}$，如果 $\det(z\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i)$ 不恒等于零，则称系统(6.27)是正则的；如果系统(6.27)是正则的，且对于任意 $i\in\mathcal{S}$，满足 $\deg(\det(z\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$，则称系统(6.27)是因果的；如果对于任意 $\boldsymbol{\phi}_k$ 和 $r_0\in\mathcal{S}$，满足 $E[\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k\mid\boldsymbol{\phi}_k,r_0]<\infty$，则称系统(6.27)是随机稳定的，其

中 $E[\cdot]$表示数学期望；如果系统(6.27)满足正则性，因果性和随机稳定性，则称系统(6.27)是随机容许的。

6.2.2 主要结果

下面给出本节的主要结果，首先由引理 6.1 得到如下结果。

定理 6.4 如果存在适维正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{Z}_l$ 和矩阵 $\boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{S}_{di}$ ($i \in \mathbb{S}$, $k=1,2,3$, $l=1,2$)使得 LMIs(6.28)成立，则系统(6.27)是随机容许的。

$$\boldsymbol{\Pi}_{i,j}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_i+\boldsymbol{Y}_j & \boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i & h_1\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1 & \rho\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2 \\ * & -\bar{\boldsymbol{P}}_i & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}<0\ (i\in\mathbb{S},\ j=1,2), \tag{6.28}$$

其中 $\boldsymbol{\Xi}_i=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{i,11} & \boldsymbol{\Xi}_{i,12} & \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{\Xi}_{i,22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\Xi}_{i,11}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}_i-\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{E}+\mathrm{sym}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_i)+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+(1+\rho)\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}$，

$\boldsymbol{\Xi}_{i,12}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{di}+\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{di}+\bar{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_{di}$，$\boldsymbol{\Xi}_{i,22}=\mathrm{sym}(\boldsymbol{S}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{di})-\boldsymbol{Q}_3$，

$\boldsymbol{Y}_1=-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{Y}_2=-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{W}_1$，

$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{W}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_1=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}]$，

$\boldsymbol{W}_2=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}\quad -\boldsymbol{I}]$，$\bar{\boldsymbol{P}}_i=\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j$，$\boldsymbol{\Gamma}_i=[\bar{\boldsymbol{A}}_i\quad \boldsymbol{A}_{di}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}]$，

$\bar{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{E}$，$\rho=h_2-h_1$。

$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为满足 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=0$ 的任意列满秩矩阵。

证明 为了证明系统(6.27)的随机容许性，首先证明系统(6.27)的正则性和因果性。由于 $\boldsymbol{E}$ 奇异且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r<n$，则存在非奇异矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}, \hat{\boldsymbol{N}}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足

$$\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{6.29}$$

定义

$$\hat{\boldsymbol{A}}_i = \hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{A}_i\hat{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{A}}_{i,11} & \hat{\boldsymbol{A}}_{i,12} \\ \hat{\boldsymbol{A}}_{i,21} & \hat{\boldsymbol{A}}_{i,22} \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{P}}_i = \hat{\boldsymbol{M}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\hat{\boldsymbol{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{P}}_{i,11} & \hat{\boldsymbol{P}}_{i,12} \\ \hat{\boldsymbol{P}}_{i,12}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{P}}_{i,22} \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}_i = \boldsymbol{S}_i\hat{\boldsymbol{N}} = [\hat{\boldsymbol{S}}_{i1}, \hat{\boldsymbol{S}}_{i2}], \hat{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{M}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}。 \tag{6.31}$$

由式(6.28)，有 $\boldsymbol{\Xi}_{i,11} < 0$。进而，由 $\boldsymbol{Q}_j > 0 (j = 1,2,3)$ 以及式(6.30)和(6.31)，可得

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \hat{\boldsymbol{S}}_{i,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22} + \hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{S}}_{i,2} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.32}$$

其中“ * ”为与结论无关的矩阵。

由式(6.32)，可得

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{i,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22} + \hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{S}}_{i,2} < 0, \tag{6.33}$$

式(6.33)意味着 $\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}$ 非奇异。根据反证法，假设 $\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}$ 奇异，则必存在非零向量 $\boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{R}^{n-r}$，使得 $\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}\boldsymbol{\zeta} = 0$。进而，$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{S}}_{i,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22} + \hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{S}}_{i,2})\boldsymbol{\zeta} = 0$。这与式(6.33)矛盾，故 $\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}$ 非奇异。

由于 $\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}$ 非奇异，可得

$$\begin{aligned} \det(z\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_i) &= \det(\hat{\boldsymbol{M}}^{-1})\det(z\hat{\boldsymbol{E}} - \hat{\boldsymbol{A}}_i)\det(\hat{\boldsymbol{N}}^{-1}) \\ &= \det(\hat{\boldsymbol{M}}^{-1})\det(-\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}) \\ &\quad \det(z\boldsymbol{I}_r - (\hat{\boldsymbol{A}}_{i,11} - \hat{\boldsymbol{A}}_{i,12}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,22}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,21}))\det(\hat{\boldsymbol{N}}^{-1}), \end{aligned} \tag{6.34}$$

式(6.34)表明 $\det(z\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_i)$ 不恒等于零和 $\deg(\det(z\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_i)) = r =$

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$。由定义 6.3，系统(6.27)是正则的和因果的。下面证明系统(6.27)的随机稳定性。

考虑如下 LKF：

$$V(\boldsymbol{x}_k,i)=V_1(\boldsymbol{x}_k,i)+V_2(\boldsymbol{x}_k)+\sum_{l=k-h_1}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_l+\sum_{l=k-h_2}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_l+$$
$$h_1\sum_{\theta=-h_1+1}^{0}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l+\rho\sum_{\theta=-h_2+1}^{-h_1}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l,\tag{6.35}$$

其中 $V_1(\boldsymbol{x}_k,i)=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k$，$V_2(\boldsymbol{x}_k)=\sum_{l=k-d_k}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l+\sum_{\theta=-h_2+2}^{-h_1+1}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l$。

假设 $r_k=i$，对 $V(\boldsymbol{x}_k,r_k)$ 的前向差分取数学期望，即

$\Delta V(\boldsymbol{x}_k,r_k)=E[V(\boldsymbol{x}_{k+1},r_{k+1})]-V(\boldsymbol{x}_k,r_k)$，

有

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k,i)=\Delta V_1(\boldsymbol{x}_k,i)+\Delta V_2(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x}_k-$$
$$\boldsymbol{x}_{k-h_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_{k-h_1}-\boldsymbol{x}_{k-h_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_{k-h_2}+\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(h_1^2\boldsymbol{Z}_1+\rho^2\boldsymbol{Z}_2)\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_k-$$
$$h_1\sum_{l=k-h_1}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l,\tag{6.36}$$

其中 $\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k$，

$$\Delta V_1(\boldsymbol{x}_k,i)=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}_i-\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k+2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_k+\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_k,\tag{6.37}$$

$$\Delta V_2(\boldsymbol{x}_k)=$$
$$\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l-\sum_{l=k-d_k}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l+(h_2-h_1)\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\sum_{l=k+1-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l$$
$$\leqslant\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_{k-d_k}+\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l-\sum_{l=k-d_k+1}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l+$$
$$\rho\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\sum_{l=k+1-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l$$

$$\leqslant (\rho+1)\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_{k-d_k}+\sum_{l=k+1-h_2}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l-\sum_{l=k-h_1+1}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l-\sum_{l=k+1-h_2}^{k-h_1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l$$

$$=(\rho+1)\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_{k-d_k}。\tag{6.38}$$

由 Jensen 不等式，有

$$-h_1\sum_{l=k-h_1}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\leqslant-(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-h_1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}(x_k-x_{k-h_1})。\tag{6.39}$$

根据 Jensen 不等式和引理 6.1，有

$$-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l=-\rho\sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$$

$$\leqslant\frac{-\rho}{d_k-h_1}\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\xi}_k+\frac{-\rho}{h_2-d_k}\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\xi}_k$$

$$\leqslant$$

$$\max\{-\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\xi}_k-3\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\xi}_k,-3\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\xi}_k-\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\xi}_k\},\tag{6.40}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_2$ 在式(6.28)中定义。

由 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=0$，有

$$0=2\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{S}_{di}\boldsymbol{x}_{k-d_k})$$

$$=2(\bar{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}_{k-d_k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{S}_{di}\boldsymbol{x}_{k-d_k})。\tag{6.41}$$

将式(6.37)～(6.41)代入(6.36)，整理可得

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k,i)\leqslant\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Xi}_i+\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}_i+h_1^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{\Gamma}_i]\boldsymbol{\xi}_k$$

$$+\max\{-\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\xi}_k-3\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\xi}_k,-3\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\xi}_k-\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\xi}_k\},\tag{6.42}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-h_1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-h_2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

根据 Schur 补，如果式(6.28)成立，则有

$$\boldsymbol{Q}_i^1=\boldsymbol{\Xi}_i-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}_i+h_1^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{\Gamma}_i<0,$$

$$\boldsymbol{Q}_i^2=\boldsymbol{\Xi}_i-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\Gamma}_i^{T}(\bar{\boldsymbol{P}}_i+h_1^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{\Gamma}_i<0。$$

故有 $\Delta V(\boldsymbol{x}_k,i)<0$ 和

$$E[V(\boldsymbol{x}_{k+1},r_{k+1})]-V(\boldsymbol{x}_k,r_k)\leqslant-\beta\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k, \tag{6.43}$$

其中 $\beta=\inf\{\lambda_{\min}(-\boldsymbol{Q}_i^j),i\in\mathrm{S},j=1,2\}$。

进而，对 $T\geqslant 1$，有

$$E[V(\boldsymbol{x}_{T+1},r_{T+1})]-E[V(\boldsymbol{x}_0,r_0)]\leqslant-\beta\sum_{k=0}^{T}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k。 \tag{6.44}$$

整理可得

$$\begin{aligned}E\Big[\sum_{k=0}^{T}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k\Big]&\leqslant\beta^{-1}\{E[V(\boldsymbol{x}_0,r_0)]-E[V(\boldsymbol{x}_{T+1},r_{T+1})]\}\\&\leqslant\beta^{-1}E[V(\boldsymbol{x}_0,r_0)]。\end{aligned} \tag{6.45}$$

令 $T\to\infty$，即得

$$E\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k\Big]\leqslant\beta^{-1}E[V(\boldsymbol{x}_0,r_0)]<\infty。$$

这样根据定义 6.3，系统(6.27)随机稳定。　　证毕。□

注 6.4　定理 6.4 中采用的 LKF(6.35)与文[154-155]相同，其充分利用了区间时变时滞 d_k 的信息(时滞下界 h_1 和时滞区间范围 ρ)，使所得稳定性条件比只采用部分时滞信息时(仅时滞区间范围 ρ 相关)，具有更小的保守性。而由于 $h_2=h_1+\rho$，所以当 h_1 和 ρ 已经利用时，h_2 将是冗余的，不必出现在稳定性判据中。

注 6.5　文[154-155]在推导系统稳定性条件时，由恒零等式引入了一些自由变量矩阵。定理 6.4 通过利用引理 6.1，使得需要求解的线性矩阵不等式仅包含 Lyapunov 矩阵，而避免了任何自由变量矩阵的引入。另外，文[154-155]都将 $-\sum_{l=k-h_2}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 放大为 $-\sum_{l=k-d_k}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$，而定理 6.4 利用引理 6.1 对该项进行了更加严格的定界(6.40)，这使得定理 6.4 比文[154-155]中的方法具有较小的保守性，后面给出的数值算例验证了这一点。

注 6.6　文[52, 74]对连续时间时滞系统提出了一种积分项上界估计方法。如果采用文[52, 74]中的方法对式(6.40)中的 $-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 项进行定界，则有

$$
\begin{aligned}
&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\\
&=-\rho\sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\\
&=-(h_2-d_k)\sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-(d_k-h_1)\sum_{l=k-d_k}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-\\
&(h_2-d_k)\sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l-(d_k-h_1)\sum_{l=k-h_2}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\\
&\leqslant-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2-\frac{(h_2-d_k)}{(d_k-h_1)}\boldsymbol{\gamma}_1-\frac{(d_k-h_1)}{(h_2-d_k)}\boldsymbol{\gamma}_2\\
&\leqslant-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2-(h_2-d_k)\rho^{-1}\boldsymbol{\gamma}_1-(d_k-h_1)\rho^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2,
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l+\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2+(h_2-d_k)\rho^{-1}\boldsymbol{\gamma}_1+\\
&(d_k-h_1)\rho^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2\leqslant 0。
\end{aligned}
\tag{6.47}
$$

然后，根据式(6.47)是 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_2$ 在 $[h_1,h_2]$ 上的凸组合，可得式(6.47)等价于

$$
\begin{aligned}
&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l+2\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2\leqslant 0,\\
&-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l+\boldsymbol{\gamma}_1+2\boldsymbol{\gamma}_2\leqslant 0。
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

综合式(6.46) ～(6.48)，可得

$$
-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\leqslant\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-2\boldsymbol{\gamma}_2,-2\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}。
\tag{6.49}
$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}_1\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_2\geqslant 0$，可见

$$
\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-3\boldsymbol{\gamma}_2,-3\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}\leqslant\max\{-\boldsymbol{\gamma}_1-2\boldsymbol{\gamma}_2,-2\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\}。
$$

所以采用引理 6.2 处理 $-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 项，可以取得比文[52，74]中的方法更小的保守性。

注 6.7 需要注意的是引理 6.1 中不等式(3.3)的两边仅当 $M=N$ 时才相等。这表明仅当 $\gamma_1=\gamma_2$ 时，定理 6.4 中式(6.40)的第二个“$\leqslant$”的两边才能相等。所以当使用引理 6.1 来对求和项 $-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 定界时仍引入了一定的保守性。下面，根据基于 Finsler 引理的时滞系统分析框架，得到一个具有更小保守性的判据。

定理 6.5 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_i>0,\boldsymbol{Q}_k>0,\boldsymbol{Z}_l>0$ 和矩阵 $\boldsymbol{S}_i,\boldsymbol{S}_{di},\boldsymbol{X}_i(i\in\mathbf{S},\mathrm{k}=1,2,3,\mathrm{l}=1,2)$，使得式(6.50)对于 $\mathrm{d_k}=\mathrm{h_1}$ 和 $\mathrm{h_2}$ 均成立，则系统(6.27)是随机容许的。

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1i}^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_i(d_k)\boldsymbol{\Gamma}_{1i}^{\perp}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\Gamma}_2(d_k)+\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}(d_k)\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}<0\ (i\in\mathrm{S}),\tag{6.50}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}_i(d_k)=&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{e}_3-\\&\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_5-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{E}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)+\\&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{S}_{di}\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{S}_{di}\boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1-\\&\rho(d_k-h_1)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_6-\rho(h_2-d_k)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_7,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1i}=[-\boldsymbol{I}\quad\bar{\boldsymbol{A}}_i\quad\boldsymbol{A}_{di}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(d_k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&(d_k-h_1)\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&(h_2-d_k)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_i=\bar{\boldsymbol{P}}_i+h_1^2\boldsymbol{Z}_1+\rho^2\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}_i-\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+(\rho+1)\boldsymbol{Q}_3,$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_i=\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j,\bar{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{E},\rho=h_2-h_1,$$

$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 为满足 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$ 的任意列满秩矩阵。

证明 采用与定理 6.4 类似的过程，可以证明系统(6.27)的正则性和因果性。下面仅证明系统(6.27)的随机稳定性。采用与定理 6.4 相同的 LKF(6.35)，但与定理 6.4 不同，直接利用 Jensen 不等式对 $-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l$ 项定界，有

$$-\rho\sum_{l=k-h_2}^{k-h_1-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}_l\leqslant(d_k-h_1)\rho\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{w}_1+$$

$$(h_2 - d_k)\rho \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z}_2 \boldsymbol{E} \boldsymbol{w}_2, \tag{6.51}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{x}_{k-h_1} - \boldsymbol{x}_{k-d_k})/(d_k - h_1)$，$\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{x}_{k-d_k} - \boldsymbol{x}_{k-h_2})/(h_2 - d_k)$。

用式(6.51)代替(6.40)代入(6.36)，整理可得

$$\Delta V(\boldsymbol{x}_k, i) \leqslant \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Xi}_i(d_k) \boldsymbol{\xi}_k, \tag{6.52}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_k = \left[\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-h_1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-h_2}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。这样，仿照定理 6.4 的推导，如果式(6.53)成立，

$$\boldsymbol{\zeta}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma}_{1i}^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{\Xi}_i(d_k) \boldsymbol{\Gamma}_{1i}^{\perp} \boldsymbol{\zeta}_k < 0, \forall \boldsymbol{\Gamma}_2(d_k) \boldsymbol{\zeta}_k = 0, \tag{6.53}$$

则系统(6.27)随机稳定。其中

$\boldsymbol{\zeta}_k = \left[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-h_1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_{k-h_2}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。根据 Finsler 引理，式(6.53)等价于(6.50)。　　证毕。□

注 6.8　定理 6.5 利用基于 Finsler 引理的方法，避免了定理 6.4 在使用引理 6.1 来对求和项定界时所引入了的保守性，使得定理 6.5 比定理 6.4 具有更小的保守性。但是，定理 6.5 中也引入了一些乘子矩阵变量，使其计算负担比定理 6.4 大。

感兴趣的读者，可以在定理 6.4 和定理 6.5 的基础上，参考文[162]研究离散广义 Markov 跳变系统的有界实分析和 H_∞ 控制问题。

6.2.3　数值算例

例 6.3　考虑一个单模态标称正常系统，参数如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}。$$

计算 h_1 取不同值时，该系统随机稳定的最大时滞上界 h_2，计算结果见表 6.5。由表 6.5 可见，由定理 6.4 和定理 6.5 所求得的最大时滞上界大于文[39，84，86-87，89，163]；定理 6.5 与文[56]取得了具有最小保守性的结果，但定理 6.5 所涉及的求解变量数要比文[56]少得多；而定理 6.4 尽管就保守性而言要大于定理 6.5 和文[56]，但定理 5.4 所涉及的求解变量数比定理 6.5 和文[56]有大幅度的减少。所以，定理 6.4 和定理 6.5 在减小保守性和提高求解效率方面改进了已有文献[39，56，84，86-87，89，163]。

表 6.5 最大时滞上界 h_2

h_1	2	6	10	12	变量数
文[84]	7	9	12	13	16
文[163]	10	11	13	14	18
文[39]	10	11	13	14	42
文[86]	10	12	16	16	12
文[87]	13	14	15	17	41
文[89]	13	14	17	18	21
文[56]	17	18	20	21	62
定理 5.4	16	17	19	20	18
定理 5.5	17	18	20	21	34

例 6.4 考虑一个单模态标称广义系统，参数如下：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0.35 & 0.7\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}。$$

设 $h_1=1$，$\boldsymbol{R}=[0\quad 1]^T$，由定理 6.4 和定理 6.5 均可得最大时滞上界 $h_2=9$，而采用文[149]中的算法只能得到 $h_2=7$。可见本节的方法具有更小的保守性。

例 6.5 考虑一个两模态标称系统(6.26)，参数为：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0.86 & 0.1\\ 0.7 & 0.97\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}-0.33 & 0\\ -0.1 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.83 & -0.6\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-0.35 & 0\\ -0.1 & -0.12\end{bmatrix}。$$

转移概率矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.7 & 0.2\end{bmatrix}$。

取 h_1 为不同值时，计算该系统随机容许的最大时滞上界 h_2 见表 6.6。由表 6.6 可见，本节所得结果比文[154]具有更小的保守性。

表 6.6　最大时滞上界 h_2

h_1	0	1	2	3	4	5
文[154]	2	3	3	3	4	5
定理 6.4	3	3	3	4	4	5
定理 6.5	3	4	4	4	4	5

附录 A　连续时间 Markov 跳变系统的仿真方法

连续时间 Markov 跳变系统可以用如下模型描述：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{r}(t)),\boldsymbol{x}(0)=x_0, \tag{6.54}$$

其中 $f(\cdot)$ 为非线性函数；$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 分别是系统状态和控制输入向量；$r(t)$ 为跳变模态，是取值于有限集合 $\Xi=\{1,\cdots,s\}$ 上的齐次 Markov 链，其转移概率为

$$P_{ij}(t)=P[r(t+h)=j\mid r(t)=i]=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h), & i\neq j\\ 1+\pi_{ii}h+o(h), & i=j,\end{cases}$$

其中 $P(t)=(P_{ij}(t))$，$(i,j\in\Xi)$称为转移概率矩阵，π_{ij} 是从模态 i 转移到模态 j 的转移率，当 $i\neq j$ 时，$\pi_{ij}>0$，并有 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$；$o(h)$ 满足 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h}=0$。$\boldsymbol{\Pi}=(\pi_{ij})$ $(i,j\in\Xi)$称为转移率矩阵。转移率矩阵与转移概率矩阵具有如下关系：

$$-\pi_{ii}\overset{\Delta}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t},\ \pi_{ij}\overset{\Delta}{=}\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t},i\neq j。$$

下面将分别讨论连续时间 Markov 跳变系统(6.54)仿真建模的两个部分：

(1)构造跳变模态 $r(t)$，即建立连续时间 Markov 链的仿真算法。

为了对连续时间 Markov 链进行仿真，首先需要解释转移率矩阵 $\Pi=(\pi_{ij})$ 的概率意义，令

$$\tau_1=\inf\{t:t>0,r(t)\neq r(0)\},$$

其中 τ_1 表示逗留在初始状态的时间(或首次离开初始状态的时刻)。τ_1 的概率特性与转移率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}=(\pi_{ij})$ 的关系可以由如下定理得到。

定理 6.6 [164]设 Markov 链 $\{r(t),t\geqslant 0\}$ 轨道右连续，则对 $i\in \Xi$，$t\geqslant 0$，有

$$P(\tau_1 > t \mid r(0)=i)=\exp(-\pi_i t),$$

其中 $\pi_i=-\pi_{ii}$。

定理 6.6 说明系统停留在状态 $r(0)=i$ 的时间 τ_1 是服从参数为 π_i 的指数分布的，并且有

$$E[\tau_1 \mid r(0)=i]=\pi_i^{-1}。 \tag{6.55}$$

由式(6.55)可见，π_i 决定了过程 $\{r(t),t\geqslant 0\}$ 停留在状态 $r(0)=i$ 的平均时间，它刻画了随机过程从 i 出发的转移速率。根据 π_i 的不同，Markov 链的状态分 3 种情形：

(1) $\pi_i=0$，称 i 为吸收状态，这时过程以概率 1 永远停留在 i 状态；

(2) $\pi_i=\infty$，称 i 为瞬时状态，这时过程在 i 状态几乎不停留立即跳到别的状态；

(3) $0<\pi_i<\infty$，称 i 为逗留状态，这时过程在 i 状态停留若干时间后跳到别的状态，停留时间服从指数分布，并且随机过程从 i 状态跳到 j 状态的概率由如下定理确定。

定理 6.7[164] 设 Markov 链 $\{r(t),t\geqslant 0\}$ 轨道右连续，且 $0<\pi_i<\infty$，则对 $i\in \Xi$，$t\geqslant 0$，$j\neq i$ 有

$$P[\tau_1\leqslant t, r(\tau_1)=j \mid r(0)=i]=\frac{\pi_{ij}}{\pi_i}[1-\exp(-\pi_i t)]$$

$$P[r(\tau_1)=j \mid r(0)=i]=\frac{\pi_{ij}}{\pi_i}。$$

由定理 6.6 和定理 6.7 可知，对于连续参数 Markov 链 $\{r(t),t\geqslant 0\}$，当给定 $r(\tau_n)=i_n(n\geqslant 0)$ 时，停留在 i_n 状态的时间 $\{\theta_n,n\geqslant 1\}$ 条件独立，且 θ_n 服从参数为 π_{i_n} 的指数分布，而状态转移概率为 $P\{r(\tau_{n+1}=i_{n+1} \mid r(\tau_n)=i_n)\}=\dfrac{\pi_{i_n,i_{n+1}}}{\pi_{i_n}}$。因此对于初始分布为 $\{P_j(0),j\in \mathbf{S}\}$ 且转移率矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}=(\pi_{ij})$ 的 Markov 链 $\{r(t),t\geqslant 0\}$ 轨道的仿真可分为以下 3 个部分：

(1)初始分布 $P_i(0)$ 的仿真；

(2)停留时间 $\{\theta_n, n \geqslant 1\}$ 的仿真；

(3)状态转移 $P\{r(\tau_{n+1} = i_{n+1} \mid r(\tau_n) = i_n)\} = \dfrac{\pi_{i_n, i_{n+1}}}{\pi_{i_n}}$ 的仿真。

具体仿真步骤如下：

算法 6.1　(连续参数 Markov 链生成)：

Step 1：取两串相互独立的同为 (0,1) 上的均匀分布随机变量序列 $\{U_n, n \geqslant 0\}$ 和 $\{V_n, n \geqslant 1\}$。这可以通过调用 Matlab 中的均匀随机数函数 rand() 来实现。

Step 2：若 U_0 满足

$$\sum_{k=0}^{i_0-1} P_k(0) \leqslant U_0 < \sum_{k=0}^{i_0} P_k(0)$$

则取 $r(0) = i_0$ 作为初始状态。

Step 3：取出 U_1，令 $\theta_1 = -\pi_{i_0}^{-1} \ln U_1$ 作为 $r(t)$ 停留在 $r(0) = i_0$ 的时间。

Step 4：取出 V_1，若 $i_1 \in \Xi$ 使 V_1 满足

$$\sum_{k=0}^{i_1-1} \frac{\pi_{i_0 k}}{\pi_{i_0}} \leqslant V_1 < \sum_{k=0}^{i_1} \frac{\pi_{i_0 k}}{\pi_{i_0}},$$

则取 $r(\tau_1) = r(\theta_1) = i_1$。

Step 5：取出 U_1，令 $\theta_2 = -\pi_{i_1}^{-1} \ln U_2$ 作为 $r(t)$ 停留在状态 $r(\tau_1) = i_1$ 的时间，再取 $\tau_2 = \theta_1 + \theta_2$ 作为第二次跳变时刻。

Step 6：取出 V_2，若 $i_2 \in \Xi$ 使 V_2 满足

$$\sum_{k=0}^{i_2-1} \frac{\pi_{i_1 k}}{\pi_{i_1}} \leqslant V_2 < \sum_{k=0}^{i_2} \frac{\pi_{i_1 k}}{\pi_{i_1}},$$

则取 $r(\tau_2) = i_2$。

……

Step 2n+1：取出 U_n，令 $\theta_n = -\pi_{i_{n-1}}^{-1} \ln U_n$ 作为 $r(t)$ 停留在状态 $r(\tau_{n-1}) = i_{n-1}$ 的时间，再取 $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$ 作为第 n 次跳变时刻。

Step 2n+2：取出 V_n，若 $i_n \in \Xi$ 使 V_n 满足

$$\sum_{k=0}^{i_n-1}\frac{\pi_{i_{n-1},k}}{\pi_{i_{n-1}}}\leqslant V_n<\sum_{k=0}^{i_n}\frac{\pi_{i_{n-1},k}}{\pi_{i_{n-1}}},$$

则取 $r(\tau_n)=i_n$。

如此重复如上步骤 2n+1 和步骤 2n+2，就可以仿真得到一条模态变化轨道。

以下为算法 6.1 的 Matlab 程序实现：

```
clear;clc;
Pai=[10,5,5;1,2,1;0.7,0.3,1];
mu=[0,0.25,0.5,0.25];
%初始状态
U0=rand(1,1);
a=0;
for k =1:3;
      a=a+mu(k);
      if U0>=a&&U0<a+mu(k+1);X0=k;break;
      end
end
nn=100;
U=rand(1,nn);
V=rand(1,nn);
X=[X0];
taul=0;
for n=1:nn
%停留时间计算
tau(n)=-(Pai(X0,X0))^(-1)*log(U(n));
taul(n+1)=taul(n)+tau(n);
a=0;
for k=1:3;
if k~=X(n);
   if k==1; a=0;
```

```
    if V(n)>=a&&V(n)<a+Pai(X(n),k)/Pai(X(n),X(n));X(n
+1)=k;break;
    else a=a+Pai(X(n),k)/Pai(X(n),X(n));
    end
    else
    if V(n)>=a&&V(n)<a+Pai(X(n),k)/Pai(X(n),X(n));X(n
+1)=k;break;
      else a=a+Pai(X(n),k)/Pai(X(n),X(n));
      end
      end
        end
        end
    end
    X1=[X(1:end-1);X(1:end-1)];
    X1=[X1(:);X(end)]';
    tau2=[tau1(2:end)-eps;tau1(2:end)];
    tau2=[tau1(1);tau2(:)];
    for ii=1:length(X1)
    k(ii)=Mode(X1(ii));
    end
    plot(tau2,k')
    var=[tau2,k'];%var 保存了模态跳变轨道
```

(2)将跳变模态 $r(t)$ 引入 Simulink，建立跳变参数动态系统仿真模型。

下面将通过一个数值实例来说明连续时间 Markov 线性系统的仿真建模方法。考虑如下连续时间 Markov 跳变线性系统[165]：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(r(t))\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{6.56}$$

系统(6.56)共有三个模态，各个模态时的系统参数如下：

$$\boldsymbol{A}(1)=\begin{bmatrix}2.5 & 0.3 & 0.8\\ 0 & 3 & 0.2\\ 0 & 0.5 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}(2)=\begin{bmatrix}-2.5 & 1.2 & 0.3\\ -0.5 & -5 & 1\\ 0.25 & 1.2 & -5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(3)=\begin{bmatrix}-2 & 1.5 & -0.4\\ 2.2 & -3 & 0.7\\ 1.1 & 0.9 & -2\end{bmatrix}。$$

系统状态转移率矩阵为

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}-10 & 5 & 5\\ 1 & -2 & 1\\ 0.7 & 0.3 & -1\end{bmatrix}。$$

首先设初始模态概率分布为 (0.25,0.5,0.25)，采用算法 6.1 可以得到模态跳变轨道如图 6.1 所示。由于具有 Markov 跳变参数的线性系统实质上属于时变线性系统，利用 Simulink 进行仿真比较方便。为了将在 Matlab 中仿真得到的模态跳变轨道引入到 Simulink 中进行联合仿真，将 Matlab 中计算得到的模态跳变轨道以变量 var 存贮在工作空间(workspace)中，再在 Simulink 中利用 From Workspace 模块将变量 var 引入。以下为在 Simulink 中搭建的仿真模型，如图 6.2 所示。

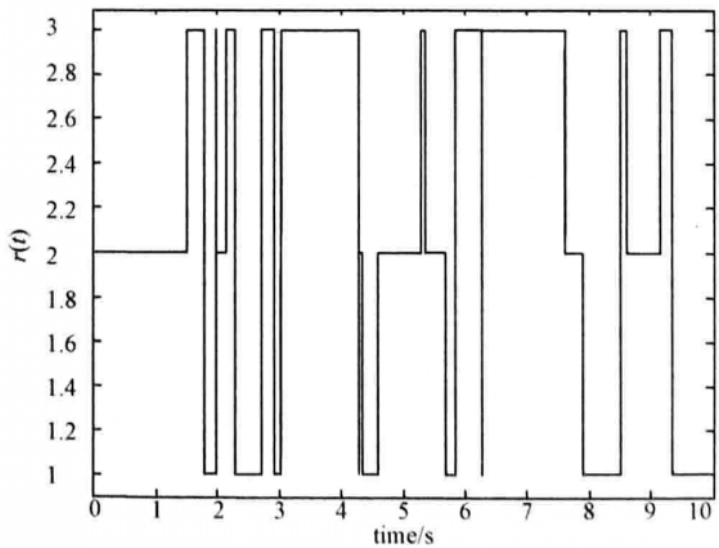


图 6.1　模态跳变轨道

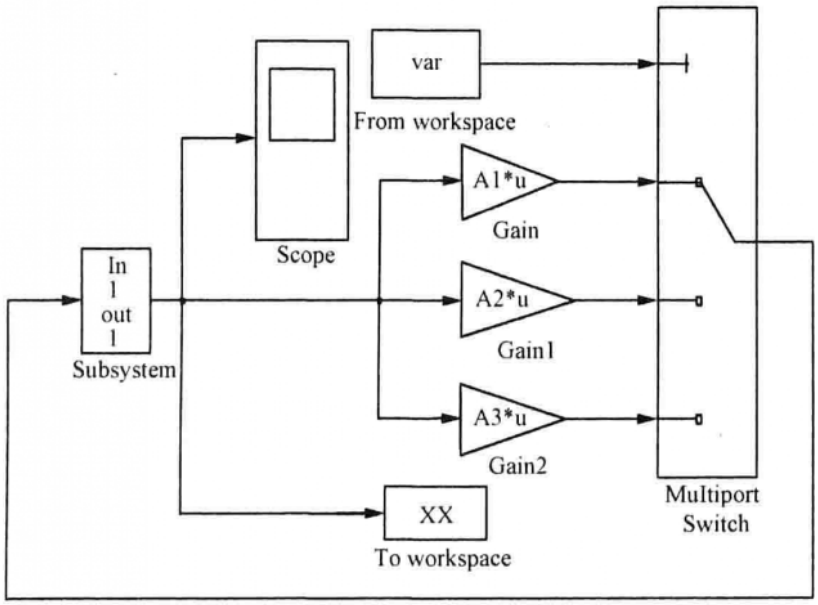


图 6.2　跳变线性系统仿真模型

对于系统(6.56),易知 $\boldsymbol{A}(1)$ 的特征值为 (2.5,3.0916,1.9084),所以模态 1 对应的子系统是不稳定的。而根据文[165]中的稳定性判据可知该系统是随机稳定的。随机选取初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,对图 6.2 中的跳变线性系统模型进行 50 次仿真,所有仿真结果均显示该系统各个状态在有限时间内收敛到 0。图 6.3 为初始状态取为 $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1,2)$ 时的系统状态变化轨线。

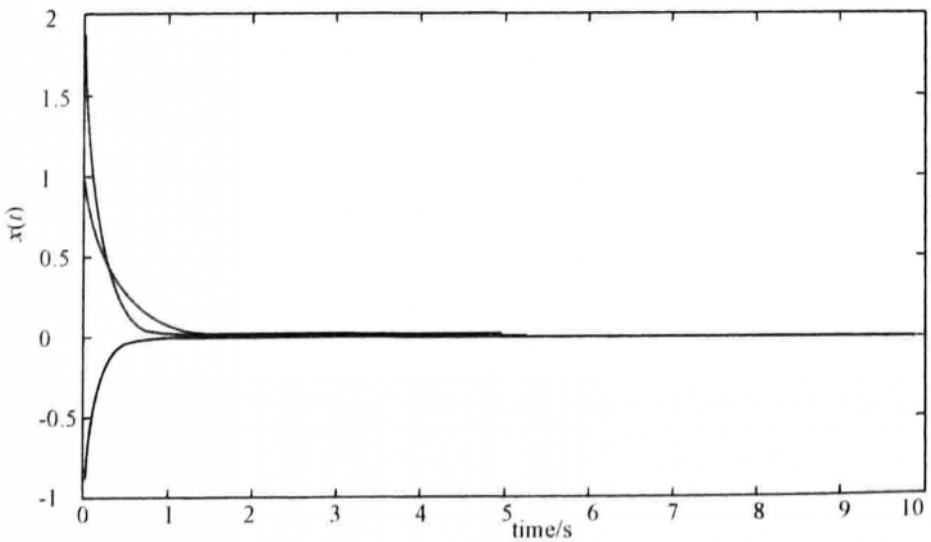


图 6.3　跳变线性系统状态变化轨线

第 7 章　时滞离散 T-S 模糊系统的分析和综合

T-S 模糊系统是一种基于模型的模糊系统，首先由 Takagi(高木)和 Sugeno(关野)提出，后被 Sugeno(关野)和 Kang(龚)进一步研究，因此又被称为 T-S-K 模糊模型。T-S 模糊模型的特点是模糊规则的结论部分是线性函数，这样有利于应用线性系统分析的成熟方法。虽然 T-S 模糊模型将结论部分限制为线性函数，但却没有降低其建模能力，很早就证明 T-S 模糊系统可以任意精度逼近紧致集上的连续实函数。由于对于复杂被控对象可以提供系统的解决方法，T-S 模糊控制吸引了大量的研究[166-167]。另一方面，时滞现象广泛出现在各种自然和工程系统中，因此有必要研究时滞 T-S 模糊控制系统的分析和设计问题[168-172]。但是，已有研究大都局限于时滞对控制器获得的系统状态的影响，而在实际情况下，模糊控制规则的前提变量也常常不可避免地受到时滞的影响，因此必须考虑时滞对前提变量的影响。近年来，对该问题的研究取得了一些进展：文[173]和文[174-180]分别基于 LRF 法和 LKF 法研究了存在输入时滞的 T-S 模糊系统的稳定性、鲁棒性和控制器设计问题。但已有文献均针对连续时间系统[173-180]，目前还没有关于输入时滞离散时间 T-S 模糊控制系统的研究。

T-S 模糊控制对于复杂非线性控制对象提供了一种系统解决方案，但是输入时滞的引入将导致系统分析和综合的困难。本章将在基于 Finsler 引理的时滞系统分析框架下，考虑具有输入时滞的离散模糊 T-S 模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。

7.1　系统描述

考虑如下具有输入时滞的离散 T-S 模糊模型[181]：

被控对象规则 i：IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and$\cdots$，$\theta_r(k)$ is M_{ir}，

THEN

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i(k))\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i(k))\boldsymbol{u}_{k-d_k} + \boldsymbol{B}_{\omega i}\boldsymbol{\omega}_k, \\ \boldsymbol{z}_k = (\boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}_i(k))\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{D}_i + \Delta\boldsymbol{D}_i(k))\boldsymbol{u}_{k-d_k}, \\ \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\phi}_k, k = -d_M, -d_M+1, \cdots, 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

其中 $\theta_i(k)(i \in \{1,2,\cdots,r\})$ 为模糊前提变量；M_{ij} $(i \in \mathbf{S}=\{1,2,\cdots,s\}$，$j \in \{1,2,\cdots,r\})$ 为模糊集合，s 为模糊规则数，$\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}_k \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入，$\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^q$ 为被控输出，$\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbf{R}^p$ 为干扰输入且 $\boldsymbol{\omega}_k \in L_2[0,\infty)$，$\boldsymbol{\phi}_k$ 为初始状态函数。时变输入时滞 d_k 满足

$$d_m \leqslant d_k \leqslant d_M, \tag{7.2}$$

矩阵 $\Delta\boldsymbol{A}_i(k)$，$\Delta\boldsymbol{B}_i(k)$，$\Delta\boldsymbol{C}_i(k)$ 和 $\Delta\boldsymbol{D}_i(k)$ 描述了系统不确定性且具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}_i(k) & \Delta\boldsymbol{B}_i(k) \\ \Delta\boldsymbol{C}_i(k) & \Delta\boldsymbol{D}_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{1i} \\ \boldsymbol{H}_{2i} \end{bmatrix} \boldsymbol{F}(k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{1i} & \boldsymbol{E}_{2i} \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$

其中 $\boldsymbol{H}_{1i}$，$\boldsymbol{H}_{2i}$，$\boldsymbol{E}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{E}_{2i}$ $(i \in \mathbf{S})$ 为已知定常矩阵；$\boldsymbol{F}(k)$ 为未知实矩阵且满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{F}(k) \leqslant \boldsymbol{I}$ $(\forall k)$。

模糊系统(7.1)的总输出为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_k)\left[(\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i(k))\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i(k))\boldsymbol{u}_{k-d_k} + \boldsymbol{B}_{\omega i}\boldsymbol{\omega}_k\right], \\ \boldsymbol{z}_k = \sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_k)\left[(\boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}_i(k))\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{D}_i + \Delta\boldsymbol{D}_i(k))\boldsymbol{u}_{k-d_k}\right], \end{cases} \tag{7.4}$$

其中 $h_i(\theta_k) = \mu_i(\theta_k) / \sum_{i=1}^{s} \mu_i(\theta_k)$，$\mu_i(\theta_k) = \prod_{j=1}^{r} M_{ij}(\theta_j(k))$，$M_{ij}(\theta_j(k))$ 为 $\theta_j(k)$ 对 M_{ij} 的隶属度。假设 $\mu_i(\theta_k) \geqslant 0 (i \in \mathbf{S})$，$\sum_{i=1}^{s} \mu_i(\theta_k) > 0 (\forall k)$。故而，$h_i(\theta_k) \geqslant 0 (i \in \mathbf{S})$，$\sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_k) = 1$。

根据并行分布补偿(parallel distributed compensation，PDC)原

理，采用如下控制规则。

控制器规则 i：IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and$\cdots$，$\theta_r(k)$ is M_{ir}，

THEN

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{x}_k, \tag{7.5}$$

这样，总控制律可以表示为

$$\boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_k)\boldsymbol{K}_i \boldsymbol{x}_k, \tag{7.6}$$

其中 $\boldsymbol{K}_i$（$i \in \mathbf{S}$）为局部控制增益。

注意到 $\boldsymbol{u}_{k-d_k} = \sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_{k-d_k})\boldsymbol{K}_i \boldsymbol{x}_{k-d_k}$，需要假设 $h_i(\theta_k)$ 在 $k \in [-d_M, 0]$ 内均有定义，且 $h_i(\theta_{k-d_k}) \geqslant 0 (i \in \mathbb{S})$，$\sum_{i=1}^{s} h_i(\theta_{k-d_k}) = 1$。为简化描述，下文中记：$h_i = h_i(\theta_k)$，$h_i^d = h_i(\theta_{k-d_k})$。

另外注意到，由于输入时滞的存在使得被控子系统的隶属函数为 $h_i(\theta_k)$，而对应的控制器隶属函数为 $h_i(\theta_{k-d_k})$，所以此时系统已经违背了严格意义上的 PDC 形式，这增加了系统分析的难度。

综合上文，闭环系统具有如下形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{s} h_i [\bar{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}_{\omega i}\boldsymbol{\omega}_k] + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} h_i h_j^d \bar{\boldsymbol{B}}_i \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{x}_{k-d_k}, \\ \boldsymbol{z}_k = \sum_{i=1}^{s} h_i \bar{\boldsymbol{C}}_i \boldsymbol{x}_k + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} h_i h_j^d \bar{\boldsymbol{D}}_i \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{x}_{k-d_k}, \end{cases} \tag{7.7}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_i = \boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i(k)$，$\bar{\boldsymbol{B}}_i = \boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i(k)$，$\bar{\boldsymbol{C}}_i = \boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}_i(k)$，$\bar{\boldsymbol{D}}_i = \boldsymbol{D}_i + \Delta\boldsymbol{D}_i(k)$。

本章的设计目标是设计模糊控制器(7.5)使闭环系统(7.7)满足如下性能：

(1)当 $\omega_k \equiv 0$ 时，对于任意满足(7.2)的时滞 d_k，闭环系统渐近稳定。

(2)扰动输入 $\boldsymbol{\omega}_k$ 到被控输出 $\boldsymbol{z}_k$ 的 $\boldsymbol{L}_2$ 增益小于 γ，即在零初始条件下对于任意非零 $\boldsymbol{\omega}_k \in L_2[0, \infty)$ 满足 $\| \boldsymbol{z}_k \|_2 < \gamma \| \boldsymbol{\omega}_k \|_2$。

注 7.1 模糊规则前提变量 $\theta_i(k)$（$1 \leqslant i \leqslant r$）通常由被控系统

状态或输出构成。显然，经过状态反馈后，由于 d_* 的存在，控制器获得的信息不仅包括时滞状态 x_{k-d_k}，还有时滞前提变量 h_j^d，并使得最终得到的闭环系统(7.7)存在时滞隶属度 h_j^d。为了处理式(7.7)中的二重求和项 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{K}_jx_{k-d_k}$ 和 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\bar{\boldsymbol{D}}_i\boldsymbol{K}_jx_{k-d_k}$，以下将考虑采用新的 LKF 方法设计模糊控制器。

以下记 $\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k$。在得出本章主要结论之前，先给出如下引理。

引理 7.1[182]　对于矩阵 $\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{X}_{ij}$（$i,j\in\mathbf{S}$）和 $\boldsymbol{S}>0$，有

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_j\leqslant\sum_{i=1}^{s}h_i\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_i,$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}h_ih_j^dh_kh_l^d\boldsymbol{X}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_{kl}\leqslant\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\boldsymbol{X}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_{ij},$$

其中 $h_i\geqslant0$，$h_i^d\geqslant0$（$i\in\boldsymbol{S}$）且 $\sum_{i=1}^{s}h_i=1$，$\sum_{i=1}^{s}h_i^d=1$。

7.2　主要结果

首先假设已知状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_i$（$i\in\mathbb{S}$），提出如下的标称闭环系统(7.8)稳定且具 H_∞ 范数界的充分条件：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=\sum_{i=1}^{s}h_i[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_{\omega i}\boldsymbol{\omega}_k]+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}_{k-d_k},\\ \boldsymbol{z}_k=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{h}_i\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_k+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}_{k-d_k},\end{cases}\tag{7.8}$$

定理 7.1　给定 $K_i(i\in\mathbf{S})$，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_l>0(e=1,2,3)$，$\boldsymbol{R}_1>0$，$\boldsymbol{R}_2>0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 使得 LMIs(7.9)对于 $d_k=d_m$ 和 d_M 均成立，则对于任意满足(7.2)的时滞 d_k，系统(7.8)渐近稳定且具 H_∞ 范数界 γ。

$$\boldsymbol{\Omega} ij(d_k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_{ij}(d_k)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}(d_k)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(d_k)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} & \boldsymbol{\Lambda}_{ij}^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{U} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \tag{7.9}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_{ij}(d_k)=\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\omega i}\boldsymbol{e}_7+\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\omega i})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1-\gamma^2\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_7,$$

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)=&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{e}_2+\\&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{R}_1)\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_4-\\&\rho(d_k-d_m)\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_5-\rho(d_M-d_k)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_6,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}(d_k)=[\bar{\boldsymbol{S}}(d_k)\quad\boldsymbol{0}_{2n\times n}],$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}(d_k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (d_k-d_m)\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (d_M-d_k)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{X}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times 2n}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}_1+(\rho+1)\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{R}_1,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=[\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}\quad\boldsymbol{B}_{\omega i}],\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}=[(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})\quad\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{P}\quad d_m\boldsymbol{R}_1\quad\rho\boldsymbol{R}_2],\ \boldsymbol{U}=\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{P},-\boldsymbol{R}_1,-\boldsymbol{R}_2\},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{ij}=[\boldsymbol{C}_i\quad\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_j\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}],\ \rho=d_M-d_m。$$

证明　首先假设 $\boldsymbol{\omega}_k=0$，并考虑如下 LKF：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_k=&\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_k+\sum_{l=k-d_m}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_l+\sum_{l=k-d_M}^{k-d_m}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_l+\\&\sum_{\theta=-d_M+1}^{-d_m+1}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l+d_m\sum_{\theta=-d_m+1}^{0}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_l+\\&\rho\sum_{\theta=-d_M+1}^{-d_m}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_l,\end{aligned} \tag{7.10}$$

沿系统(7.8)的轨迹，取(7.10)的前向差分 $\Delta V_k=V_{k+1}-V_k$，可得：

$$\begin{aligned}\Delta V_k=&\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x}_{k-d_m}-\\&\boldsymbol{x}_{k-d_M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_{k-d_M}+(d_M-d_m+1)\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_k-\sum_{l=k-d_M}^{k-d_m}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_l+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}(d_m^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{y}_k-d_m\sum_{l=k-d_m}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_l-\rho\sum_{l=k-d_M}^{k-d_m-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_l\\
&\leqslant 2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_k+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}_1+(\rho+1)\boldsymbol{Q}_3]\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x}_{k-d_m}-\\
&\boldsymbol{x}_{k-d_M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_{k-d_M}-\boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}_{k-d_k}+\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}+d_m^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{y}_k-\\
&d_m\sum_{l=k-d_m}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_l-\rho\sum_{l=k-d_M}^{k-d_m-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_l。
\end{aligned}\tag{7.11}$$

由 Jensen 不等式，可得

$$-d_m\sum_{l=k-d_m}^{k-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{y}_l\leqslant-(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_m})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d_m}),\tag{7.12}$$

和

$$-\rho\sum_{l=k-d_M}^{k-d_m-1}\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{y}_l\leqslant-\rho(d_k-d_m)\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_1-\rho(d_M-d_k)\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_2,\tag{7.13}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=\sum_{l=k-d_k}^{k-d_m-1}\boldsymbol{y}_l/(d_k-d_m)$，$\boldsymbol{w}_2=\sum_{l=k-d_k}^{k-d_k-1}\boldsymbol{y}_l/(d_M-d_k)$。

将式(7.12)～(7.13)代入(7.11)，再由引理 7.1，可得

$$\begin{aligned}
\Delta V_k&\leqslant\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(\mathrm{d}_k)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}h_ih_j^dh_\mu h_\nu^d\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mu\nu}\Big]\boldsymbol{\xi}_k\\
&\leqslant\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_ih_j^d(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)+\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij})\Big]\boldsymbol{\xi}_k,
\end{aligned}\tag{7.14}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-d_k}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-d_m}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_{k-d_M}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{d}_m^2\boldsymbol{R}_1+\rho^2\boldsymbol{R}_2$。

这样，由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论知，如果式(7.15)成立，则系统(7.8)渐近稳定。

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)+\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}]\boldsymbol{\xi}_k<0,\forall\bar{\boldsymbol{S}}(d_k)\boldsymbol{\xi}_k=0,\tag{7.15}$$

再利用 Finsler 引理，式(7.15)等价于

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)+\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}+\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{S}}(d_k)+\bar{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}(d_k)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}<0。\tag{7.16}$$

另外，由 Schur 补，式(7.9)可以保证式(7.16)成立，这意味着如果式(7.9)成立则有 $\Delta V_k<0$。这样，系统(7.8)渐近稳定。

在零初始条件下，对于非零 $\boldsymbol{\omega}_k\in L_2[0,\infty)$，由引理 7.1，有

$$\Delta V_k + \boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k - \gamma^2\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_k$$

$$\leqslant \boldsymbol{\zeta}_k^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{i}^{s}\sum_{j=1}^{s}h_i h_j^{d}(\boldsymbol{\Xi}_{ij}(d_k)+\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}+\boldsymbol{\Lambda}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_{ij})\Big]\boldsymbol{\zeta}_k, \tag{7.17}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。根据 Finsler 引理，式(7.9)等价于式(7.17)和约束条件 $\boldsymbol{S}(d_k)\boldsymbol{\zeta}_k=0$，所以如果式(7.8)成立，则对于 $\forall k>0$，有

$$\Delta V_k + \boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k - \gamma^2\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_k < 0。$$

由零初始条件，易知

$$\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k - \gamma^2\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_k < -V_N < 0。$$

令 $N\to\infty$，即可得 $\|\boldsymbol{z}\|_2<\gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_2$。 证毕。□

注 7.2 定理 7.1 中采用了基于 Finsler 引理的研究框架，避免了对 LKF(7.10)的前向差分的过度定界，减小了所得结果的保守性。

以下，考虑不确定模糊系统(7.7)的鲁棒稳定性判据，结合定理 7.1 和引理 1.2 可以容易地得到如下结果。

定理 7.2 给定 $K_i(i\in\mathbf{S})$，如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_l>0(l=1,2,3),\boldsymbol{R}_1>0,\boldsymbol{R}_2>0,\bar{\boldsymbol{X}}$ 和标量 $\lambda_i>0(i\in\mathbf{S})$，使得 LMIs(7.18)对于 $d_k=d_m$ 和 d_M 均成立，则对于任意满足(7.3)的不确定性和时滞 d_k(7.2)，系统(7.7)鲁棒稳定。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{ij}(d_k) & \bar{\boldsymbol{h}}_i & \lambda_i\bar{\boldsymbol{E}}_i^{\mathrm{T}}\\ * & -\lambda_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\lambda_i\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0\ (i,j\in\mathbf{S},l=1,2), \tag{7.18}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{H}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} & \boldsymbol{H}_{2i}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\boldsymbol{E}}_{ij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{1i} & \boldsymbol{E}_{2i}\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}。$$

现在准备由式(7.9)或(7.18)求解控制增益 $\boldsymbol{K}_i(i\in\mathbf{S})$。首先，不考虑参数不确定性。令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}^{-1},\tilde{\boldsymbol{Q}}_l=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}_l\boldsymbol{W}(l=1,2,3),\tilde{\boldsymbol{R}}_k=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{W}(k=1,2),\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{W}(j\in\mathbf{S}),\tilde{\boldsymbol{X}}=\tilde{\boldsymbol{W}}\bar{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{W}},\tilde{\boldsymbol{W}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W},\cdots,\boldsymbol{W}\}$，对式(7.9)的 $\boldsymbol{\Omega}_{ij}(d_k)$ 用 $\mathrm{diag}\{\tilde{\boldsymbol{W}},\boldsymbol{I},\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}_1^{-1},\boldsymbol{R}_2^{-1},\boldsymbol{I}\}$ 作合同变换，可得如下结果。

定理 7.3 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0,\tilde{\boldsymbol{Q}}_l>0(l=1,2,3),\tilde{\boldsymbol{R}}_1>0,\tilde{\boldsymbol{R}}_2$

>0，$\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\boldsymbol{Y}_i\ (i\in\mathbf{S})$，LMIs(7.19)在等式约束(7.20)下，对于 $d_k=d_m$ 和 d_M 均成立，则对于任意满足(7.2)的时滞 d_k，闭环系统(7.7)渐近稳定且具 H_∞ 范数界 γ。

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{ij}(d_k)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)+\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}(d_k)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(d_k)\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} & \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ij}^{\mathrm{T}}\\ * & -\tilde{\boldsymbol{U}} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \tag{7.19}$$

$$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{R}}_k^{-1}\boldsymbol{W}(k=1,2), \tag{7.20}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_{ij}(d_k)=&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Y}}_i\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}_3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_1\boldsymbol{e}_3+\\&\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}(-\tilde{\boldsymbol{Q}}_1+\tilde{\boldsymbol{Q}}_2-\tilde{\boldsymbol{R}}_1)\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}_2\boldsymbol{e}_4-\rho d_k\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{e}_5-\\&\rho(\rho-d_k)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{e}_6+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{wi}\boldsymbol{e}_7+\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{wi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1-\gamma^2\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_7,\end{aligned}$$

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}_i=(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+\tilde{\boldsymbol{Q}}_1+(\rho+1)\tilde{\boldsymbol{Q}}_3-\tilde{\boldsymbol{R}}_1,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}=[(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{I})\boldsymbol{W}\quad\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{B}_{wi}],$$

$$\tilde{\boldsymbol{V}}=[\boldsymbol{I}\quad d_m\boldsymbol{I}\quad\rho\boldsymbol{I}],\ \tilde{\boldsymbol{U}}=\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{W},-\boldsymbol{J}_1,-\boldsymbol{J}_2\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ij}=[\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{W}\quad\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{Y}_j\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}]。$$

进而，反馈增益为 $\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{W}^{-1}\ (i\in\mathbf{S})$。

若设 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k=\boldsymbol{W}(k=1,2)$，则 LMIs(7.19)和等式约束(7.20)可以变为一组线性矩阵不等式，但这将导致非常保守的结果。故而，将非线性问题(7.19)和(7.20)放松为如下的优化问题：

$$\text{Minimize trace}(\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{W}}+\tilde{\boldsymbol{R}}_1\hat{\boldsymbol{R}}_1+\tilde{\boldsymbol{R}}_2\hat{\boldsymbol{R}}_2+\boldsymbol{J}_1\hat{\boldsymbol{J}}_1+\boldsymbol{J}_2\hat{\boldsymbol{J}}_2), \tag{7.21}$$

约束条件为：式(7.19)和

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{J}}_k & \hat{\boldsymbol{W}}\\ \hat{\boldsymbol{W}} & \hat{\boldsymbol{R}}_k\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_k & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \hat{\boldsymbol{J}}_k\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \hat{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{R}}_k & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \hat{\boldsymbol{R}}_k\end{bmatrix}\geqslant 0\ (k=1,2)。 \tag{7.22}$$

由于函数 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{W}}+\tilde{\boldsymbol{R}}_1\hat{\boldsymbol{R}}_1+\tilde{\boldsymbol{R}}_2\hat{\boldsymbol{R}}_2+\boldsymbol{J}_1\hat{\boldsymbol{J}}_1+\boldsymbol{J}_2\hat{\boldsymbol{J}}_2)$ 是双线性的，问题(7.21)也不是凸的。下面提出一种迭代算法求解该问题。

算法 7.1 （控制器求解算法）

定义：$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2\}$，$\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}\{\hat{\boldsymbol{W}},\hat{\boldsymbol{R}}_1,\hat{\boldsymbol{R}}_2,\hat{\boldsymbol{J}}_1,\hat{\boldsymbol{J}}_2\}$，

$$\boldsymbol{W}_i=\mathrm{diag}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_1,\tilde{\boldsymbol{Q}}_2,\tilde{\boldsymbol{Q}}_3,\boldsymbol{Y}_i,\tilde{\boldsymbol{X}}\}。$$

Step 1 给定 d_m 和 d_M，最大迭代次数 $t_{\max}$ 和容许误差 $\varepsilon>0$，设置 $\gamma^0>0$。

Step 2 令 $t=0$，对于 γ^t，求解满足(7.19)和(7.22)的可行解 $(\boldsymbol{X}^t,\boldsymbol{Y}^t,\boldsymbol{W}_i^t)$。

Step 3 给定$(\boldsymbol{X}^t,\boldsymbol{Y}^t,\gamma^t)$，在约束条件(7.19)和(7.22)下，求解：

$$\mathrm{Minimize}\ \mathrm{Trace}(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^t),$$

得可行解$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}_i)$，记作$(\bar{\boldsymbol{X}}^t,\bar{\boldsymbol{Y}}^t,\boldsymbol{W}_i^t)$。

Step 4 由 Step 2 得到的 $\boldsymbol{K}_i^t=\boldsymbol{Y}_i^t(\boldsymbol{W}^t)^{-1}$，判断定理 7.1 中(7.9)是否可行。如果可行，令 $\gamma^*=\gamma^t$，$\boldsymbol{K}_i^*=\boldsymbol{Y}_i^t(\boldsymbol{W}^t)^{-1}$，$\gamma^{t+1}=\gamma^t-\Delta\gamma$，并跳转至 Step 1，其中 $\Delta\gamma>0$ 为预设参数。

Step 5 如果 $|\mathrm{trace}(\boldsymbol{X}^t\bar{\boldsymbol{Y}}^t+\bar{\boldsymbol{X}}^t\boldsymbol{Y}^t)-2\mathrm{trace}(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{Y}^t)|\leqslant\varepsilon$ 或 $t+1\geqslant t_{\max}$，停止算法。

Step 6 对 $\alpha\in[0,1]$，求解

$$\min_{\alpha\in[0,1]}\mathrm{trace}(\boldsymbol{X}^t+\alpha(\bar{\boldsymbol{X}}^t-\boldsymbol{X}^t))(\boldsymbol{Y}^t+\alpha(\bar{\boldsymbol{Y}}^t-\boldsymbol{Y}^t))。$$

设 $\boldsymbol{X}^{t+1}=\boldsymbol{X}^t+\alpha(\bar{\boldsymbol{X}}^t-\boldsymbol{X}^t)$，$\boldsymbol{Y}^{t+1}=\boldsymbol{Y}^t+\alpha(\bar{\boldsymbol{Y}}^t-\boldsymbol{Y}^t)$，跳转至 Step 2。

注 7.3 原始 SLPM 算法[55]的结束条件比较严格，而算法 7.1 受文[56]的启发，增加了更多的自由度，放松了结束条件，有助于减小算法保守性。根据第 4 章的讨论，如果在算法 7.1 中引入随机初始化机制，可以进一步减小算法的保守性。

相似于定理 7.2，结合定理 7.3 和引理 1.2 可得如下鲁棒 H_∞ 控制条件。

定理 7.4 如果存在矩阵 $\boldsymbol{W}>0$，$\tilde{\boldsymbol{Q}}_l>0(l=1,2,3)$，$\tilde{\boldsymbol{R}}_1>0$，$\tilde{\boldsymbol{R}}_2>0$，$\tilde{\boldsymbol{X}}$，$\boldsymbol{Y}_i$ 和标量 $\varepsilon_i>0(i\in\mathbf{S})$ 满足 LMIs(7.23)和等式约束(7.22)，则对于

任意满足(7.3)的不确定性和时滞 d_k(7.2),闭环系统(7.7)鲁棒渐近稳定且具 H_∞ 范数界 γ。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{ij}l & \varepsilon_i\hat{\boldsymbol{H}}_i & \hat{\boldsymbol{E}}_{ij}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\varepsilon_i\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0(i,j \in \mathbf{S}, l = 1,2), \tag{7.23}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{H}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{1i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}} & \boldsymbol{H}_{2i}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$\hat{\boldsymbol{E}}_{ij} = [\boldsymbol{E}_{1i}\boldsymbol{W} \quad \boldsymbol{E}_{2i}\boldsymbol{Y}_j \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]$。进而鲁棒控制增益为 $K_i = \boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{W}^{-1}$ ($i \in \mathbf{S}$)。

注 7.4　相似于定理 7.3,算法 7.1 也可应用于定理 7.4。

7.3　数值算例

例 7.1　考虑一个 2-规则 T-S 模糊系统,参数为:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.06 \\ 0.15 & -0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.04 \\ -0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{\omega 1} = \boldsymbol{B}_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2 = [1 \quad 1], \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2 = 1,$$

$\boldsymbol{H}_{11} = \boldsymbol{H}_{12} = [0.1 \quad 0.1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{H}_{21} = \boldsymbol{H}_{22} = 0$, $\boldsymbol{E}_{11} = [0.1 \quad 0.2]$, $\boldsymbol{E}_{12} = [0.05 \quad 0.1]$, $\boldsymbol{E}_{21} = 0.1$, $\boldsymbol{E}_{22} = 0.2$, $h_1 = (x_1(k)+2)/5$, $h_2 = (3 - x_1(k))/5$。

算法 7.1 的参数设为 $d_m = 1$, $d_M = 3$, $t_{\max} = 100$ 和 $\varepsilon = 0.001$。采用 Matlab/LMI 工具箱,由算法 7.1 可以计算最优控制 $\boldsymbol{K}_1^* = \boldsymbol{K}_2^* = [-0.3136 \quad 0.0248]$ 和性能 $\gamma^* = 0.8$。仿真中,初始条件设为 $\boldsymbol{\phi}(k) = [2, -1]^{\mathrm{T}}$ ($k \leqslant 0$),干扰信号为 $\omega_k = e^{-0.05k}\sin(10k)$。控制结果见图 7.1。如图 7.1 所示,在输入时滞 $1 \leqslant d(k) \leqslant 3$ 条件下,闭环系统由所设计的控制器镇定。

例 7.2　考虑如下卡车-拖车控制系统[183]:

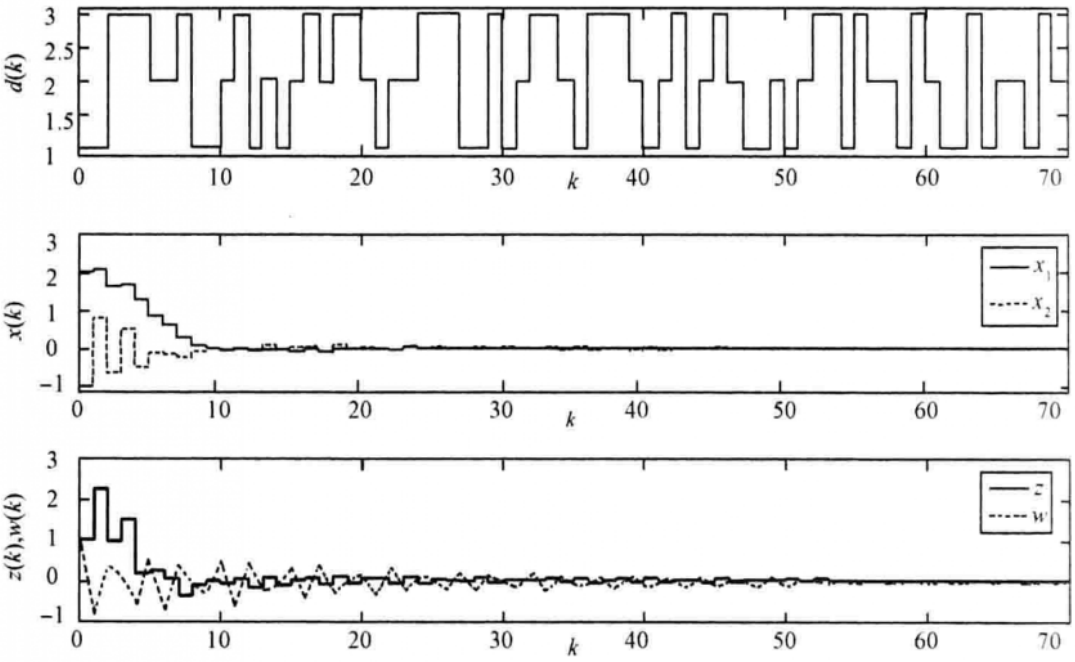


图 7.1　例 7.1 的控制结果

$$\begin{cases} x_1(k+1)=\left(1-\dfrac{v\Delta t}{L}\right)x_1(k)+\dfrac{v\Delta t}{l}u(k), \\ x_2(k+1)=x_2(k)+\dfrac{v\Delta t}{L}x_1(k), \\ x_3(k+1)=x_3(k)+v\Delta t\sin\left(x_2(k)+\dfrac{v\Delta t}{2L}x_1(k)\right)。 \end{cases} \tag{7.24}$$

当 $-179.4270^\circ<\theta(k)<179.4270^\circ$ 时，系统(7.24)可以表示为

$$x_{k+1}=\sum_{i=1}^{2}h_i(\theta_k)[A_ix_k+B_iu_k], \tag{7.25}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k=[\boldsymbol{x}_1(k)\quad \boldsymbol{x}_2(k)\quad \boldsymbol{x}_3(k)]^{\mathrm{T}}$，$\theta_k=x_2(k)+\dfrac{v\Delta t}{2L}x_1(k)$，

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1-v\Delta t/L & 0 & 0 \\ v\Delta t/L & 1 & 0 \\ v^2\Delta t^2/(2L) & v\Delta t & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 1-v\Delta t/L & 0 & 0 \\ v\Delta t/L & 1 & 0 \\ gv^2\Delta t^2/(2L) & gv\Delta t & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} v\Delta t/l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$h_1(\theta_k) = \dfrac{\sin(\theta_k) - g\theta_k}{\theta_k(1-g)}$，$h_2(\theta_k) = \dfrac{\theta_k - \sin(\theta_k)}{\theta_k(1-g)}$，$g = 10^{-2}/\pi$。

模型参数为 l=0.2 m，L=0.32 m，v=-0.1 m/s，Δt =0.5 s。

设置 $d_m=0$，$d_M=2$，$t_{\max}=100$ 和 $\varepsilon=0.001$。采用 Matlab/LMI 工具箱，求解算法 7.1 得到模糊镇定控制 $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{K}_2=[1.5158 \quad -0.4326 \quad 0.1416]$。仿真中，设 $\boldsymbol{\phi}(k)=[-0.5\pi \quad 0.75\pi \quad 1]^{\mathrm{T}}(k\leqslant 0)$。仿真结果见于图 7.2，由该图可见在控制器作用下闭环稳定。

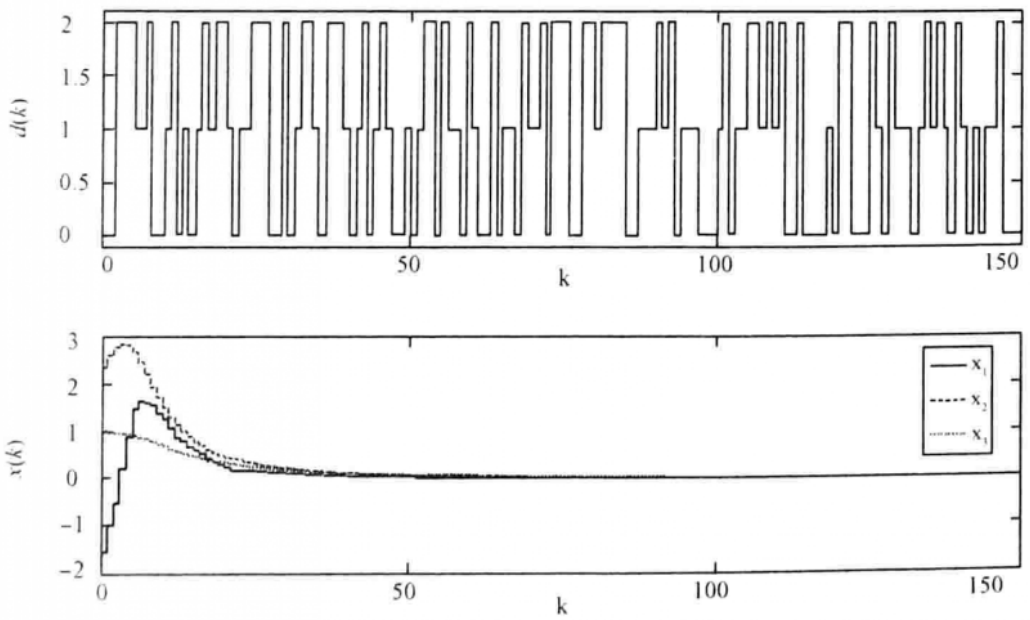


图 7.2　例 7.2 中采用本章方法的控制效果

为便于比较，忽略时滞，采用文[184]中的方法可以获得控制器 $\boldsymbol{K}_1=[5.0591 \quad -2.6328 \quad 0.9023]$ 和 $\boldsymbol{K}_2=[5.0568 \quad -2.5769 \quad 0.9112]$。仿真结果见图 7.3，由此可见采用文[184]中的控制器虽然可以达到镇定，但控制性能却严重恶化。

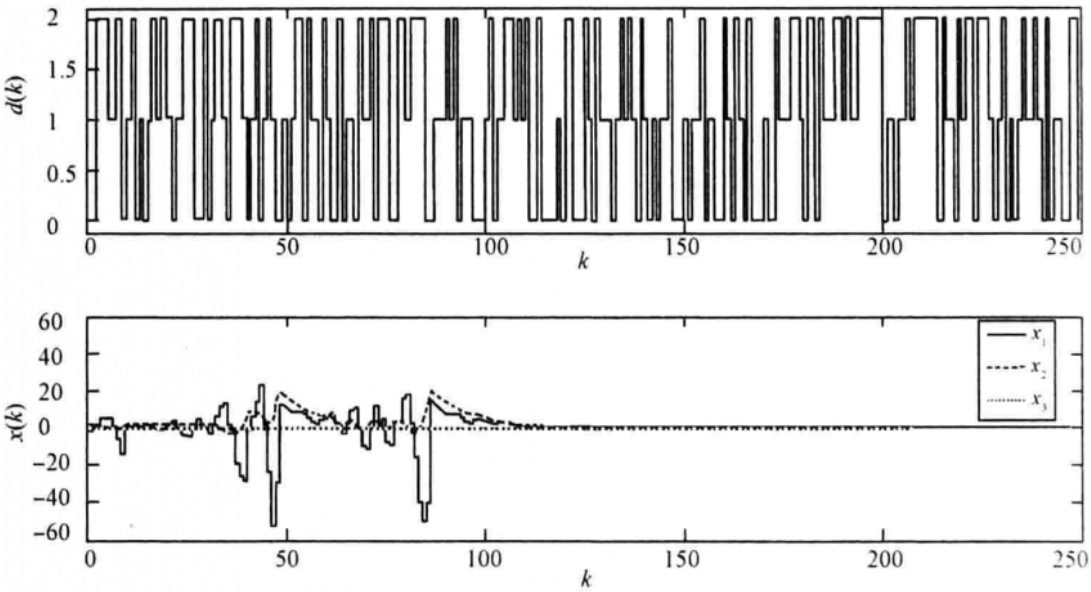


图 7.3　例 7.2 中采用文[184]方法的控制效果

7.4　本章小结

本章研究了输入时滞情况下的离散模糊系统 H_∞ 控制问题。首先构造新的 LKF，采用 Finsler 引理分析框架，得到在状态反馈作用下的闭环系统渐近稳定性判据。该稳定性判据为 LMI 可行性问题，可以方便地求解。而模糊反馈 H_∞ 控制器设计问题，可以用本章提出的迭代算法有效求解。最后，数值算例验证了本章所提出方法的有效性。

第 8 章　时滞系统方法在网络控制系统中的应用

网络化控制具有信息资源共享、节约硬件、易于扩展和维护、高可靠性及灵活等优点，正逐渐替代传统点对点控制模式，成为控制系统未来的发展方向。尽管网络控制系统(NCSs)与传统控制系统相比有许多优点，但是网络信息传输也给网络控制系统的分析和设计带来了一些新的问题。比如，带宽、承载能力和服务能力有限等特性，使得数据传输可能出现时滞、丢包、错序、采样频率波动和量化误差等问题，从而造成超调量增大、振荡加剧、稳定裕度减小，甚至可能导致系统的不稳定[185]。

已有的网络控制系统研究包括：稳定性分析[186-190]、状态反馈或输出反馈镇定[191-200]、保性能控制[201-204]等。值得注意的是，当执行器端的零阶保持器(ZOH)采用事件驱动方式时，文[188]提出了一种新的网络控制系统时滞建模和分析方法，基于该方法可以将网络控制系统中的网络诱导时滞、数据丢包和采样等影响归结为区间时变时滞。针对网络控制系统中的量化问题，文[205]在文[206]的基础上证明了采用扇区定界方法可以有效地分析对数量化器下的量化控制系统。但是，大部分已有文献中都仅仅考虑量测器端或者执行器端之一存在量化器的情况，而对存在双量化器情况的研究还较少。另外，已有研究在采用 LKF 方法研究网络时滞相关稳定性时的保守性也较大。

对网络控制系统(NCS)的研究，具有很高的理论和应用价值。本章将应用基于 Finsler 引理的时滞系统分析方法，讨论存在网络诱导时滞、数据包丢失和量化控制的网络控制系统分析和设计问题。

8.1 网络控制系统的时滞相关镇定控制器设计

考虑一个网络控制系统，如图 8.1 所示。图中被控对象为如下线性系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases} \tag{8.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 分别为状态和控制输入向量，$\boldsymbol{x}_0$ 为初始状态。

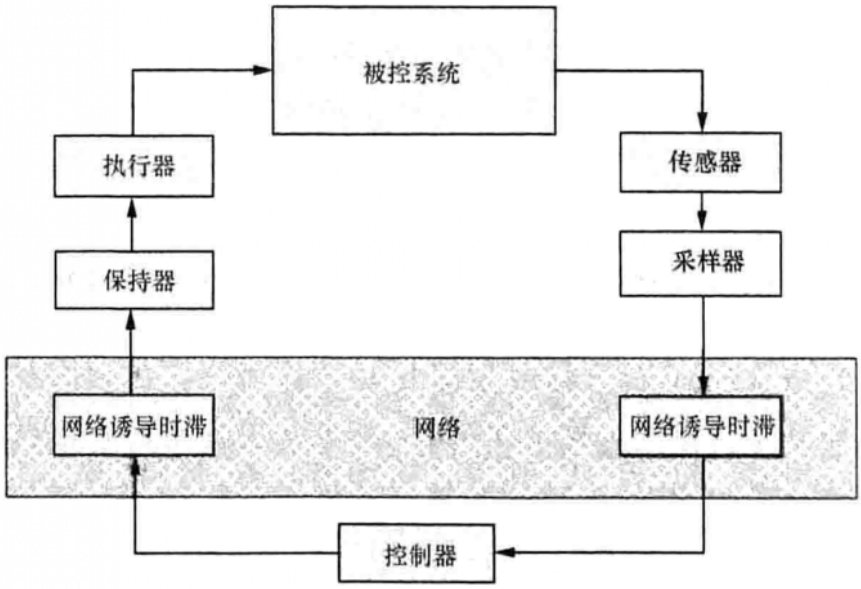


图 8.1 网络控制系统

传感器和采样器采用时间驱动方式，控制器、零阶保持器和执行器采用事件驱动方式。采样器周期为 h，采样时刻为 s_i。记零阶保持器的更新时刻为 $t_k(k=1,2,\cdots)$，则此时刻的系统控制输入为：

$$\boldsymbol{u}(t_k)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k-\tau_k), \tag{8.2}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为状态反馈增益，$\tau_k=\tau_k^{sc}+\tau_k^{ca}+\tau_k^{c}$ 表示由采样器至零阶保持器的网络诱导时滞(network-induced delay)，τ_k^{sc} 为采样器到控制器的网络诱导时滞，τ_k^{ca} 为控制器到执行器的网络诱导时滞，τ_k^{c} 为控制器计算时滞，且常常可以忽略不计。

网络诱导时滞的构成因素有[185]：

(1)数据包等待时滞。当网络出现拥塞时，数据被发送前的等待时间。

(2)数据打包时滞。发送端将待发送信息封装成数据包并送入队列的时间。

(3)传输时滞。数据包在物理介质上传输所需时间，其大小取决于数据包的大小、网络带宽和传输距离。

进而考虑零阶保持器的特性，则被控对象输入为

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k-\tau_k),t_k\leqslant t<t_{k+1}, \tag{8.3}$$

综合式(8.1)和(8.3)，可得闭环系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k-\tau_k),t_k\leqslant t<t_{k+1},\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases} \tag{8.4}$$

网络诱导时滞 τ_k 区间有界，故假设：

$$0<\tau_m\leqslant\tau_k\leqslant\tau_M, \tag{8.5}$$

其中 τ_m 和 τ_M 分别为时滞下界和时滞上界。

在基于 TCP 协议的网络中，为了保证数据传输的可靠性，未到达接收端的数据会被多次重传。但是由于网络控制系统的实时性要求，当新数据到达接收端后，发送端未发出的旧数据会被删除。另外，由于网络重传受到时间限制，超过限定时间，数据包仍然会被丢弃。这种数据包丢失的现象，简称为丢包。错序是指接收端接受的数据的时间关系发生错乱，即先发出的数据反而后到达。同样由于系统数据的实时性要求，控制器将只选择最新数据用于控制计算，晚到达的旧数据将被丢弃。因此，当控制器和执行器均采用最新信号时，通信通道中的网络丢包和错序相当于零阶保持器在此期间未发生更新，一个丢包等价于在零阶保持器的更新间隔中引入一个采样周期的时滞。

这样，综合网络诱导时滞、网络丢包、错序以及零阶保持器的影响，零阶保持器的更新间隔可以表示为：

$$t_{k+1}-t_k=(\sigma_{k+1}+1)h+\tau_{k+1}-\tau_k, \tag{8.6}$$

其中 σ_{k+1} 为在更新间隔 $[t_k,t_{k+1})$ 内的累计丢包数目。

下面将式(8.4)中的 $t_k-\tau_k$ 表示为：

$$t_k - \tau_k = t - \tau_m - \tau(t), \tag{8.7}$$

其中 $\tau(t) = t - t_k + \tau_k - \tau_m$，$t_k \leqslant t < t_{k+1}$。进而，有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \tau(t) < t_{k+1} - t_k + \tau_k - \tau_m \\ &= (\sigma_{k+1} + 1)h + \tau_{k+1} - \tau_k + \tau_k - \tau_m \\ &\leqslant (\bar{\sigma} + 1)h + \tau_M - \tau_m \overset{\Delta}{=} \bar{\tau}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 为在更新间隔 $[t_k, t_{k+1})$ 内的累计丢包数目的上界，即 $0 \leqslant \sigma_k \leqslant \bar{\sigma}(k=1,2,\cdots)$。

图 8.2 给出了网络控制系统中信号时序的示意图。

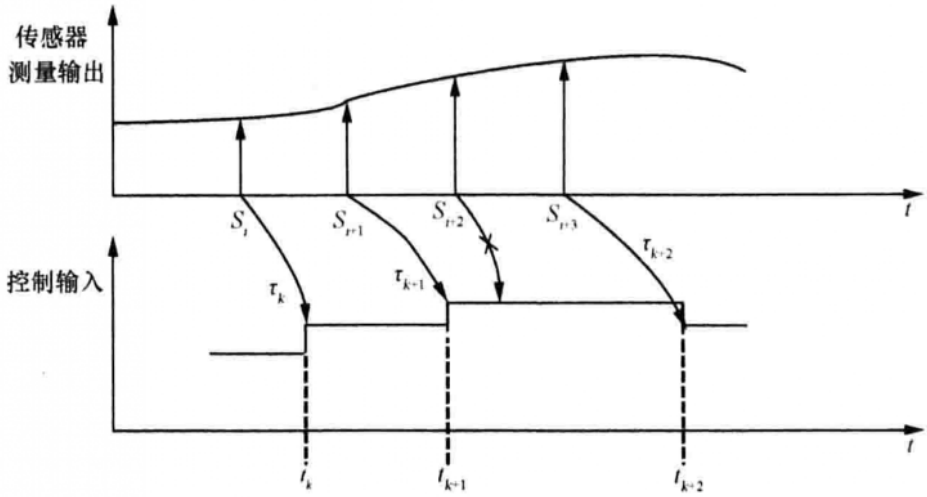


图 8.2　网络控制系统的信号时序

由式(8.8)可以看出，零阶保持器的最大更新周期为 $\bar{\tau}$，这意味着有效控制信号至多经过 $\bar{\tau}$ 就一定可以传输到执行器，从而更新系统输入。在文[207]中，对于给定的时滞下界 τ_m，$\bar{\tau}$ 被称为最大容许等价时滞上界(MAEDB)。

将式(8.7)代入(8.4)，可得如下闭环系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t - \tau_m - \tau(t)), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau_m - \bar{\tau}, 0], \end{cases} \tag{8.9}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau_m - \bar{\tau}, 0]$ 为初始状态。

以下在不引起混淆的情况下，简记 $\tau(t)$ 为 τ。

采用基于 Finlser 引理的时滞系统分析方法，可以得到以下的闭环

系统稳定性判据。

定理 8.1　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_1>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_2>0,\bar{\boldsymbol{R}}_1>0,\bar{\boldsymbol{R}}_2>0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{Y}$，使得式(8.10)对于 $\tau=0$ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.9)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tau_m\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}<0, \tag{8.10}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{Q}}_1-\bar{\boldsymbol{R}}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} & \bar{\boldsymbol{R}}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\boldsymbol{Q}}_1+\bar{\boldsymbol{Q}}_2-\bar{\boldsymbol{R}}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\bar{\boldsymbol{Q}}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\tau\bar{\boldsymbol{R}}_2 & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & * & -(\bar{\tau}-\tau)\bar{\boldsymbol{R}}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\quad\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}]。$$

证明　考虑采用 LKF(8.11)：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\int_{t-\tau_m}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau_m}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}s+$$

$$\int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-\bar{\tau}}^{-\tau_m}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{8.11}$$

其中 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}_1>0,\boldsymbol{Q}_2>0,\boldsymbol{R}_1>0$ 和 $\boldsymbol{R}_2>0$。计算式(8.11)的微分，可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-\tau_m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x}_{t-\tau_m}-\\&\boldsymbol{x}_{t-\bar{\tau}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_{t-\bar{\tau}}+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\tau_m\boldsymbol{R}_1+\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2)\dot{\boldsymbol{x}}-\\&\int_{t-\tau_m}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s-\int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau_m}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s。\end{aligned} \tag{8.12}$$

由 Jensen 不等式，有：

$$-\int_{t-\tau_m}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-\tau_m})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{t-\tau_m}), \tag{8.13}$$

$$-\int_{t-\tau_m}^{t-\tau_m-\tau}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s\leqslant-\tau\,\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_1-(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{w}_2,\tag{8.14}$$

其中 $\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{x}_{t-\tau_m}-\boldsymbol{x}_{t-\tau_m-\tau})/\tau$，$\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{x}_{t-\tau_m-\tau}-\boldsymbol{x}_{t-\tau_m-\bar{\tau}})/(\bar{\tau}-\tau)$。

这样，如果式(8.15)成立，则系统(8.9)渐近稳定。

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(\tau)\boldsymbol{S}_1^{\perp}\boldsymbol{\xi}<0,\ \forall\,\boldsymbol{S}_2(\tau)\boldsymbol{\xi}=0,\tag{8.15}$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{t-\tau_m-\tau},\boldsymbol{x}_{t-\tau_m},\boldsymbol{x}_{t-\tau_m-\bar{\tau}},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}(\tau)=&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\tau_m\boldsymbol{R}_1+\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_2-\\&\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_5-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)-\\&\tau\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_6-(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_7,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_2(\tau)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\tau\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

再利用 Finsler 引理，式(8.15)等价于

$$\boldsymbol{S}_1^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(\tau)\boldsymbol{S}_1^{\perp}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0,\tag{8.16}$$

取 $\boldsymbol{S}_1^{\perp}$ 为

$$\boldsymbol{S}_1^{\perp}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

展开式(8.16)，得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}(\tau)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X}&\tau_m\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1&\bar{\tau}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2*&-\tau_m\boldsymbol{R}_1&\boldsymbol{0}*&*&-\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2\end{bmatrix}<0,\tag{8.17}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & & * & -\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & & * & * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{0} \\ * & & * & * & * & * & -(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}],$$

对式(8.17)用 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W},\cdots,\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}_1^{-1},\boldsymbol{R}_2^{-1}\}$ 做合同变换，其中 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}^{-1}$，并令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_1=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_2=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{R}}_1=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{R}}_2=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{W}$，即可得证。　　证毕。□

考虑到式(8.10)中的 $-\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W}$ 和 $-\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W}$ 项，式(8.10)为一个 NLMI。为此，进行如下近似：

$$-\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W}\leqslant\tau_m\bar{\boldsymbol{R}}_1-2\tau_m\boldsymbol{W},\ -\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W}\leqslant\bar{\tau}\bar{\boldsymbol{R}}_2-2\bar{\tau}\boldsymbol{W}。(8.18)$$

注 8.1　式(8.18)源于如下事实：

$$\tau_m(\bar{\boldsymbol{R}}_1-\boldsymbol{W})\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}(\bar{\boldsymbol{R}}_1-\boldsymbol{W})\geqslant 0,\bar{\tau}(\bar{\boldsymbol{R}}_2-\boldsymbol{W})\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}(\bar{\boldsymbol{R}}_2-\boldsymbol{W})\geqslant 0,\tag{8.19}$$

由于式(8.18)中的等号仅在 $\bar{\boldsymbol{R}}_1=\boldsymbol{W}$ 或 $\bar{\boldsymbol{R}}_2=\boldsymbol{W}$ 时才成立，故保守性比较大，但却可以避免迭代过程。利用式(8.18)可得如下结果。

定理 8.2　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_1>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_2>0,\bar{\boldsymbol{R}}_1>0,\bar{\boldsymbol{R}}_2>0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{Y}$，及标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$，使得式(8.20)对于 $\tau=0$ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.9)渐近稳定。

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tau_m\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \\ * & \tau_m\bar{\boldsymbol{R}}_1-2\tau_m\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{R}}_2-2\bar{\tau}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}<0。\tag{8.20}$$

以下考虑一个数值算例，以验证定理 8.2 的有效性。

例 8.1　考虑一个线性系统(8.1)，参数为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

初始状态取为 $\boldsymbol{x}(0)=[0.5 \quad 1]^{\mathrm{T}}$。假设采样周期为 $T=0.1$，最大丢包数目为 1 个，网络诱导时滞取为 $0.1\leqslant\tau_k=0.2|\sin t|+0.1\leqslant 0.3$，则 $0\leqslant\tau(t)\leqslant(1+1)\times 0.1+(0.3-0.1)$。此时 $\tau_m=0.1,\tau_M=0.5$。由于 $\mathrm{eig}(\boldsymbol{A})=\{1,-1\}$，故系统开环不稳定。由于 $\mathrm{rank}(\mathrm{ctrb}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))=2$，故$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可控。利用 Matlab/LMI 工具箱，应用定理 8.2，可以求得可行解：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0.4487 & 0.8975\\ 0.8975 & 1.7950\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=[0.1400 \quad 0.2798]\times e^{-4},$$

由此可得反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{W}^{-1}=[3.5746 \quad -1.7873]$。图 8.3 给出了系统状态的响应曲线。从仿真曲线可以看出，定理 8.2 给出的条件可以保证闭环系统稳定。

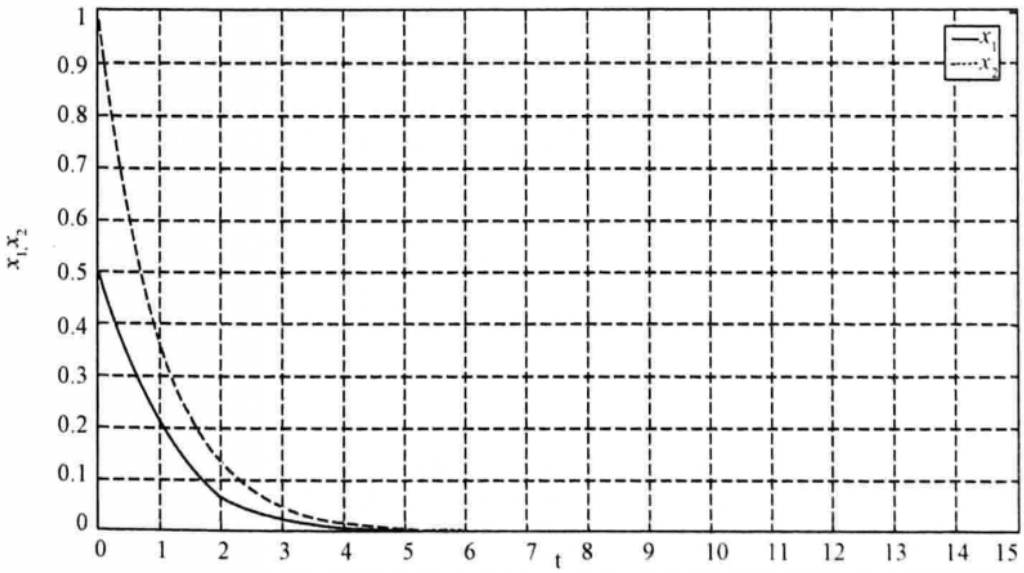


图 8.3　闭环系统响应曲线

8.2　考虑量化影响的网络控制系统

考虑一个网络控制系统，如图 8.4 所示，其中被控对象为线性系统(8.1)。如图 8.4 所示，传感器量测信号经采样和量化后，再经网络传输输入控制器。控制器输出量化后，经网络传输和保持器作为执行器

输入，执行器的输出最终作为被控对象的控制输入。

整个控制系统中，采样器输出和控制器输出分别经过两个不同的量化器 g 和 f。传感器和采样器采用时间驱动方式，量化器、控制器、零阶保持器和执行器采用事件驱动方式，采样周期为 h_s，采样时刻分别为 s_i（$i=1,2,\cdots$）。

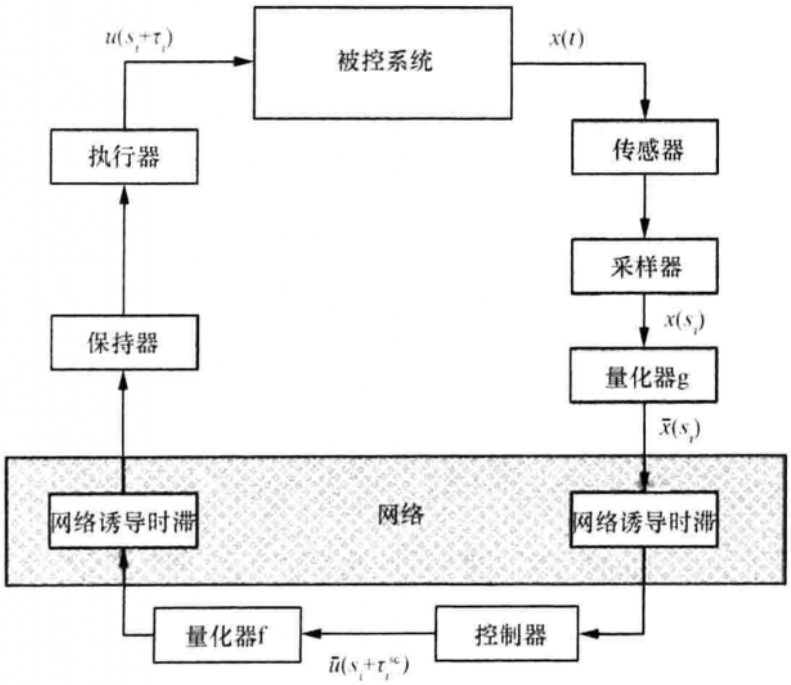


图 8.4　具有量化器的网络控制系统

记量化后的量测信号为 $\bar{x}$，控制器输出为 $\bar{u}$，被控对象输入为 u，这样在采样时刻 s_i，有如下关系：

$$\bar{\boldsymbol{x}}(s_i)=g(\boldsymbol{x}(s_i)), \tag{8.21}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(s_i+\tau_i^{sc})=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(s_i), \tag{8.22}$$

$$\boldsymbol{u}(s_i+\tau_i)=f(\bar{\boldsymbol{u}}(s_i+\tau_i^{sc}))。 \tag{8.23}$$

量化器 g 假设为对称时不变对数量化器，且各个信号通道的量化密度相同，即

$$g(x_j)=\begin{cases}u_l, \text{ 如果 } \dfrac{1}{1+\delta_\kappa}u_l<x_j\leqslant\dfrac{1}{1-\delta_\kappa}u_l, x_j>0\\ 0, \text{ 如果 } x_j=0\\ -g(-x_j), \text{ 如果 } x_j<0\end{cases} \tag{8.24}$$

其中 $\delta_g = (1-\rho_g)/(1+\rho_g)$ $(0<\rho_g<1)$，ρ_g 为量化器 g 的量化密度。这样，对数量化器 g 的量化集合为：

$U_g = \{\pm u_i : u_i = \rho_g^i u_{g0}, i = \pm 1, \pm 2, \cdots\} \cup \{\pm u_{g0}\} \cup \{0\}, 0 < \rho_g < 1, u_{g0} > 0$。

根据文[205]提出的扇区法，定义 $\Delta_g \in [-\delta_g, \delta_g]$，则 $g(\boldsymbol{x})$ 可以表示为

$$g(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I} + \Delta_g \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}。 \tag{8.25}$$

类似地，量化器 f 也为对称时不变对数量化器，且各个信号通道的量化密度相同。这样，$f(\bar{\boldsymbol{u}})$ 可以表示为

$$f(\bar{\boldsymbol{u}}) = (\boldsymbol{I} + \Delta_f \boldsymbol{I})\bar{\boldsymbol{u}}。 \tag{8.26}$$

其中 $\Delta_f \in [-\delta_f, \delta_f]$，$\delta_f = (1-\rho_f)/(1+\rho_f)$ $(0<\rho_f<1)$，ρ_f 为量化器 f 的量化密度。

综合式(8.21)～(8.23)、(8.25)和(8.26)，零阶保持器的输入为：

$$\boldsymbol{u}(s_i + \tau_i) = (\boldsymbol{I} + \Delta_f \boldsymbol{I})\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} + \Delta_g \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}(s_i) \triangleq (\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(s_i), \tag{8.27}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{K} = \Delta_f \boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\Delta_g + \Delta_f \boldsymbol{K}\Delta_g$。

记零阶保持器的更新时刻为 $t_k (k = 1, 2, \cdots)$，则量化反馈控制为：

$$\boldsymbol{u}(t_k) = (\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t_k - \tau_k), \tag{8.28}$$

其中 τ_k 表示由采样器至零阶保持器的网络诱导时滞。

进而考虑零阶保持器的特性，则被控对象输入为

$$\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t_k - \tau_k), t_k \leqslant t < t_{k+1}。 \tag{8.29}$$

综合式(8.1)和(8.29)，可得闭环系统为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t_k - \tau_k), t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0。 \end{cases} \tag{8.30}$$

采用与 8.1 节相似的推导，可得如下闭环系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t - \tau_m - \tau(t)), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau_m - \bar{\tau}, 0], \end{cases} \tag{8.31}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau_m - \bar{\tau}, 0]$ 为初始状态。

下面采用与定理 8.1 和定理 8.2 类似的推导过程，给出考虑量化影响的闭环稳定性判据和控制器设计算法的主要结果。

定理 8.3　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_1>0$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_2>0$，$\bar{\boldsymbol{R}}_1>0$，$\bar{\boldsymbol{R}}_2>0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}$，$\boldsymbol{Y}$，及标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$，使得式(8.32)对于 $\tau=0$ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.31)渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1(\tau) & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_1\delta_f^{-2}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\varepsilon_2\delta_g^{-2}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\varepsilon_3\delta_f^{-2}\delta_g^{-2}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0, \tag{8.32}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_1(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tau_m\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W} & 0 \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}+$$

$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{Y}}=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{Y}\quad\boldsymbol{0}\quad\cdots\quad\boldsymbol{0}]$，

$\bar{\boldsymbol{B}}=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{0}\quad\cdots\quad\boldsymbol{0}\quad\tau_m\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\quad\bar{\tau}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

证明　将 $\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}$ 代入(8.16)中，可得

$$\boldsymbol{S}_1^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(\tau)\boldsymbol{S}_1^{\perp}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{8.33}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{S}}_1=[-\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}]$，其他矩阵与(8.16)相同。

取 $\bar{\boldsymbol{S}}_1^{\perp}=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}] \\ \boldsymbol{I}_{6n}\end{bmatrix}$，

展开式(8.33)，得

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X} & \tau_m\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1 & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 \\ * & -\tau_m\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix}<0, \tag{8.34}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{PB}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & * & -(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}=[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}) \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]。$$

分离出式(8.34)中的不确定部分：

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\boldsymbol{XS}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X} & \tau_m\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1 & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 \\ * & -\tau_m\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\boldsymbol{XS}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{X} & \tau_m\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1 & \bar{\tau}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 \\ * & -\tau_m\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix}+$$

$$\boldsymbol{Y}\bar{\boldsymbol{B}}(\Delta_f+\Delta_g+\Delta_f\Delta_g)\bar{\boldsymbol{K}}+\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{T}}(\Delta_f+\Delta_g+\Delta_f\Delta_g)\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}},$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{PBK} & \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & * & -(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix},$$

$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}=[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{BK} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0},\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2\}$，$\bar{\boldsymbol{K}}=[\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{0}]$。

对式(8.34)用 $\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W},\cdots,\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}_1^{-1},\boldsymbol{R}_2^{-1}\}$ 取合同变换，其中 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}^{-1}$，并令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{KW}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_1=\boldsymbol{WQ}_1\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}_2=\boldsymbol{WQ}_2\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{R}}_1=\boldsymbol{WR}_1\boldsymbol{W}$，$\bar{\boldsymbol{R}}_2=\boldsymbol{WR}_2\boldsymbol{W}$，可得

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}} & \tau_m\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}+ \tag{8.35}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}(\Delta_f+\Delta_g+\Delta_f\Delta_g)\bar{\boldsymbol{Y}}+\bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}(\Delta_f+\Delta_g+\Delta_f\Delta_g)\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}<0$$

由引理 1.2，式(8.35)等价于存在 $\varepsilon_j>0(j=1,2,3)$ 使得下式成立

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}} & \tau_m\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\tau_m\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\bar{\tau}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}+ \tag{8.36}$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}+(\varepsilon_1^{-1}\delta_f^2+\varepsilon_2^{-1}\delta_g^2+\varepsilon_3^{-1}\delta_f^2\delta_g^2)\bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Y}}<0$$

进而由 Schur 补，即可得式(8.32)。　　证毕。□

采用与定理 8.2 类似的近似，可得如下控制器设计方法。

定理 8.4　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_1>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_2>0,\bar{\boldsymbol{R}}_1>0,\bar{\boldsymbol{R}}_2>0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{Y}$，及标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$，使得式(8.37)对于 $\tau=0$ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.31)渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_1(\tau) & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_1\delta_f^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\varepsilon_2\delta_g^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\varepsilon_3\delta_f^2\delta_g^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0, \tag{8.37}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}_1(\tau)=$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau)+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tau_m\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \\ * & \tau_m\bar{\boldsymbol{R}}_1-2\tau_m\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{R}}_2-2\bar{\tau}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}+$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}。$$

如果网络控制系统中，仅仅存在量测端量化器 g 或执行端量化器 f 时，可以由定理 8.4 容易地获得如下结果。其中假设量测端量化器 g 或执行端量化器 f 的量化密度为 δ。

推论 8.1　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{W}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_1>0,\bar{\boldsymbol{Q}}_2>0,\bar{\boldsymbol{R}}_1>0,\bar{\boldsymbol{R}}_2>0$ 和

$\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{Y}$，及标量 $\varepsilon > 0$，使得式(8.38)对于 τ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.31)渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\Psi}}(\tau) & \bar{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon\delta^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{8.38}$$

其中

$$\breve{\boldsymbol{\Psi}}(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}}(\tau) + \bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}_2(\tau) + \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} & \tau_m \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \\ * & \tau_m \bar{\boldsymbol{R}}_1 - 2\tau_m \boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ * & * & \bar{\tau}\bar{\boldsymbol{R}}_2 - 2\bar{\tau}\boldsymbol{W} \end{bmatrix} + \varepsilon \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}。$$

注 8.2 必须注意的是定理 8.3 和定理 8.4 中都假设了量化器的各个信号通道的量化密度相同，这个假设对于 SISO 系统自然成立。而对于 MIMO 系统，如果各个信号通道的量化密度不相同，可以采用各个通道中最粗糙的量化器密度作为总的量化密度下界，但这常常过于保守。另一方面，仅当系统为 SISO 情况且无参数不确定性时，采用扇区定界方法和二次稳定性处理量化问题才是严格的，即不引入保守性。而当系统为 MIMO 情况时，二次稳定性将只是闭环系统在量化控制下的稳定性的充分条件。这与鲁棒控制理论中“小增益定理仅仅对于单块不确定性的二次稳定性是充分必要条件”的结论，本质上是一致的[205]。为此，下面转而考虑采用量化相关 LKF，处理 MIMO 系统量化控制问题，得到保守性更低的结果。

为此，考虑量化器 g 具有如下形式：

$$g_j(x_j) = \begin{cases} u_l^j, \text{ 如果 } \dfrac{1}{1+\delta_{g_j}} u_l^j < x_j \leqslant \dfrac{1}{1-\delta_{g_j}} u_l^j, x_j > 0, \\ 0, \text{ 如果 } x_j = 0, \\ -g_j(-x_j), \text{ 如果 } x_j < 0, \end{cases} \tag{8.39}$$

其中 $\delta_{g_j} = (1-\rho_{g_j})/(1+\rho_{g_j})$ $(0 < \rho_{g_j} < 1)$，ρ_{g_j} 为量化器 g 在通道 j 的量化密度。这样，对数量化器 g_j 的量化集合为：

$U_{g_j} = \{\pm u_i^j : u_i^j = \rho_{g_j}^i u_{g0}^j, i = \pm 1, \pm 2, \cdots\} \cup \{\pm u_0^j\} \cup \{0\}, 0 < \rho_{g_j} < 1, u_{g0}^j > 0$。

定义 $\Delta_g = \mathrm{diag}\{\Delta_{g_1},\cdots,\Delta_{g_n}\}$，$\Delta_{g_j} \in [-\delta_{g_j},\delta_{g_j}]$，则 $g(x)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{g}(x) = (\boldsymbol{I}+\Delta_g)\boldsymbol{x}。 \tag{8.40}$$

量化器 f 也可以表示为

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I}+\Delta_f)\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{8.41}$$

其中 $\Delta_f = \mathrm{diag}\{\Delta_{f_1},\cdots,\Delta_{f_m}\}$，$\Delta_{f_i} \in [-\delta_{f_i},\delta_{f_i}]$，$\delta_{f_i} = (1-\rho_{f_i})/(1+\rho_{f_i})$ $(0<\rho_{f_i}<1)$，ρ_{f_i} 为量化器 f 在通道 i 的量化密度。

下面将 $\Delta_g = \mathrm{diag}\{\Delta_{g_1},\cdots,\Delta_{g_n}\}$，和 $\Delta_f = \mathrm{diag}\{\Delta_{f_1},\cdots,\Delta_{f_m}\}$，表示为如下等价的多胞型不确定性：

$$\Delta_g = \mathrm{Co}\{\bar{\Delta}_{g_1},\cdots,\bar{\Delta}_{g_{k_g}}\} = \left\{\sum_{j=1}^{k_g}\alpha_j\bar{\Delta}_{g_j} : \alpha_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{k_g}\alpha_j = 1\right\},$$

$$\Delta_f = \mathrm{Co}\{\bar{\Delta}_{f_1},\cdots,\bar{\Delta}_{f_{k_f}}\} = \left\{\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_i\bar{\Delta}_{f_i} : \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k_f}\alpha_i = 1\right\}。$$

其中 $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ 表示以各个元素为顶点构成的凸包(convex hull)。顶点数为 $k_g = 2^n$ 和 $k_f = 2^m$。顶点 $\bar{\Delta}_{g_j}$ 为对角阵，且第 j 行的对角元素为 $-\delta_{g_j}$ 或 δ_{g_j}。

进而得到闭环系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t-\tau_m-\tau(t)),\\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t\in[-\tau_m-\bar{\tau},0],\end{cases} \tag{8.42}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{K} = \mathrm{Co}\{\Delta K_{ji}\}$，$\Delta K_{ji} = \bar{\Delta}_{fi}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\bar{\Delta}_{gj}+\bar{\Delta}_{fi}\boldsymbol{K}\bar{\Delta}_{gj}$。

考虑采用如下量化相关 LKF(8.43)：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x}) = {}& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k_g}\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_j\alpha_i\boldsymbol{P}_{ji}\right)\boldsymbol{x}+\int_{t-\tau_m}^{t}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k_g}\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_j\alpha_i\boldsymbol{Q}_{1ji}\right)\boldsymbol{x}_s ds+\\ &\int_{t-\tau_m-\tau}^{t-\tau_m}\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k_g}\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_j\alpha_i\boldsymbol{Q}_{2ji}\right)\boldsymbol{x}_s ds+\\ &\int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k_g}\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_j\alpha_i\boldsymbol{R}_{1ji}\right)\dot{\boldsymbol{x}}_s ds d\theta+\\ &\int_{-\tau_m-\tau}^{-\tau_m}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k_g}\sum_{i=1}^{k_f}\alpha_j\alpha_i\boldsymbol{R}_{2ji}\right)\dot{\boldsymbol{x}}_s ds d\theta,\end{aligned} \tag{8.43}$$

其中 $\boldsymbol{P}_{ji}>0,\boldsymbol{Q}_{1ji}>0,\boldsymbol{Q}_{2ji}>0,\boldsymbol{R}_{1ji}>0,\boldsymbol{R}_{2ji}>0,j=1,\cdots,k_g,i=1,\cdots,k_f$。

参考定理 8.3、定理 8.4 和定理 2.4，可以容易地得到如下结论。

定理 8.5 如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P}_{ji}>0,\boldsymbol{Q}_{1ji}>0,\boldsymbol{Q}_{2ji}>0,\boldsymbol{R}_{1ji}>0,\boldsymbol{R}_{2ji}>0$ 和 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{X}_{ji}$，使得式(8.44)对于 $\tau=0$ 和 $\bar{\tau}$ 均成立，则系统(8.31)渐近稳定。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Xi}(\tau,j,i)+\boldsymbol{X}_{ji}\boldsymbol{S}(\tau,j,i)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\tau,j,i)\boldsymbol{X}_{ji}^{\mathrm{T}}<0,\\&\qquad j=1,\cdots,k_g,i=1,\cdots,k_f,\end{aligned}\tag{8.44}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}(\tau,j,i)=&\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\tau_m\boldsymbol{R}_{1ji}+\bar{\tau}\boldsymbol{R}_{2ji})\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{ji}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{ji}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1ji}\boldsymbol{e}_2-\\&\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{1ji}-\boldsymbol{Q}_{2ji})\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2ji}\boldsymbol{e}_5-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{1ji}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_4)-\\&\tau\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{2ji}\boldsymbol{e}_6-(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{2ji}\boldsymbol{e}_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\tau,j,i)=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1(j,i)\\\boldsymbol{S}_2(\tau)\\\boldsymbol{S}_3(\tau)\end{bmatrix}\\=&\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}_{ji})&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\tau\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&(\bar{\tau}-\tau)\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X}_{ji}=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_{2ji}\quad\boldsymbol{X}_{3ji}]。$$

注 8.3 注意到式(8.44)并不是 LMI，但是可以借鉴 4.3 节中的 BMI 算法迭代求解。

算法 8.1 （量化控制器设计）

Step 1 给定 $\tau_m,\bar{\tau}>0$，设置初始值 $\boldsymbol{K}_0$。

Step 2 由 $\boldsymbol{K}_i$，计算 $\boldsymbol{S}_{1l}(j,i)=[-\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}_l+\Delta\boldsymbol{K}_{jil})\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}]$，其中 $\Delta\boldsymbol{K}_{jil}=\bar{\Delta}_{fi}\boldsymbol{K}_l+\boldsymbol{K}_l\bar{\Delta}_{gj}+\bar{\Delta}_{fi}\boldsymbol{K}_l\bar{\Delta}_{gj}$。求解如下优化问题：在约束(8.45)下，最小化 α，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Xi}(\tau,j,i)+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}_{1l}(j,i)+\boldsymbol{X}_{2ji}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{X}_{3ji}\boldsymbol{S}_3(\tau)+\\&(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}_{1l}(j,i)+\boldsymbol{X}_{2ji}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{X}_{3ji}\boldsymbol{S}_3(\tau))^{\mathrm{T}}-\alpha\boldsymbol{I}\leqslant0,\\&\boldsymbol{P}_{ji}>0,\boldsymbol{Q}_{1ji}>0,\boldsymbol{Q}_{2ji}>0,\boldsymbol{R}_{1ji}>0,\boldsymbol{R}_{2ji}>0,\end{aligned}\tag{8.45}$$

得可行解 $\boldsymbol{X}_1$ 和 α 等，如果最优解 $\alpha<0$，则停止算法，且 $\boldsymbol{K}_i$ 即为所求控制器增益；否则，令 $\boldsymbol{X}_{1l}=\boldsymbol{X}_1$。

Step 3　由 $\boldsymbol{X}_{1l}$，求解如下优化问题：在约束(8.46)下，最小化 α。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Xi}(\tau,j,i)+\boldsymbol{X}_{1l}\boldsymbol{S}_1(j,i)+\boldsymbol{X}_{2ji}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{X}_{3ji}\boldsymbol{S}_3(\tau)+\\&(\boldsymbol{X}_{1l}\boldsymbol{S}_1(j,i)+\boldsymbol{X}_{2ji}\boldsymbol{S}_2(\tau)+\boldsymbol{X}_{3ji}\boldsymbol{S}_3(\tau))^{\mathrm{T}}-\alpha\boldsymbol{I}\leqslant 0,\\&\boldsymbol{P}_{ji}>0,\boldsymbol{Q}_{1ji}>0,\boldsymbol{Q}_{2ji}>0,\boldsymbol{R}_{1ji}>0,\boldsymbol{R}_{2ji}>0,\end{aligned}\tag{8.46}$$

得最优解 $\boldsymbol{K}$ 和 α，如果 $\alpha<0$，则停止算法，且 $\boldsymbol{K}$ 即为所求控制器增益；否则令 $\boldsymbol{K}_l=\boldsymbol{K}$。

Step 4　令 $l=l+1$，如果 $l\leqslant l_{\max}$，$\boldsymbol{K}_l=\boldsymbol{K}_{l-1}$，跳转至 Step 2；否则，重新设定初始值 $\boldsymbol{K}_0$，跳转至 Step 1；或停止算法，无可行控制器增益。

下面通过数值仿真，检验本节算法的有效性。

例 8.2　考虑一个线性系统，参数为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

此时有 $eig(\boldsymbol{A})=\{-1,0.3\}$，故系统开环不稳定。$\mathrm{rank}(\mathrm{ctrb}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))=2$，故 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 可控。采用量测端量化，量化密度取为 $\rho_g=0.8$。其他参数与例 8.1 相同。利用 Matlab/LMI 工具箱，应用推论 8.1，可以求得可行解：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}2.2052 & -0.4981\\ -0.4981 & 1.0408\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=[0.2892\quad -0.7653],$$

由此可得反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{W}^{-1}=[-0.0392\quad -0.7541]$。

图 8.5 和图 8.6 给出了系统状态和量化状态的响应曲线。从仿真曲线可以看出，推论 8.1 给出的条件可以保证闭环系统稳定。

考虑双量化情况，增加执行器端量化器，量化密度为 $\rho_f=0.8$，其他参数不变。利用 Matlab/LMI 工具箱，应用定理 8.4，可以求得可行解：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}2.2915 & -0.3933\\ -0.3933 & 0.7225\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=[0.2146\quad -0.5026],$$

由此可得反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[-0.0284\quad -0.7111]$。

图 8.7、图 8.8 和图 8.9 分别给出了系统状态、量化状态和量化控

制输入的响应曲线。从仿真曲线可以看出，定理 8.4 给出的条件可以保证闭环系统稳定。

考虑通道不同的双量化器情况，量化密度分别为 $\rho_{g1}=0.8$，$\rho_{g2}=0.95$，$\rho_f=0.8$，其他参数不变。求解算法 8.1，可以求得 $\boldsymbol{K}=[-0.0312 \quad -0.7256]$。

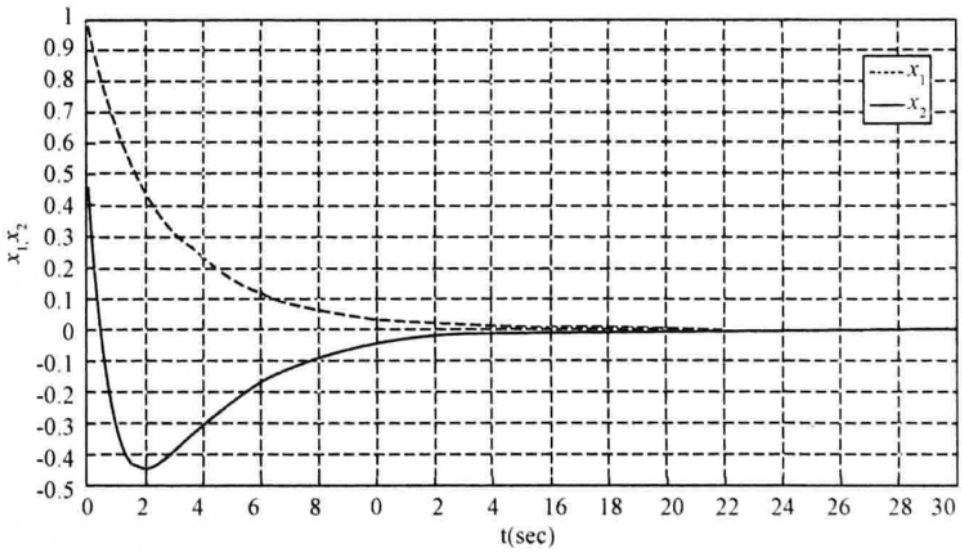


图 8.5　状态响应曲线

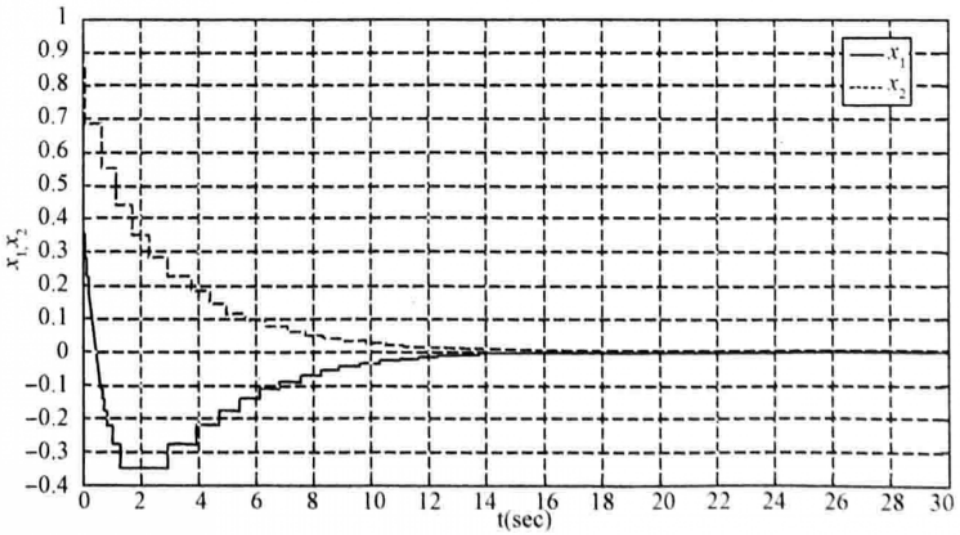


图 8.6　量化的状态响应曲线

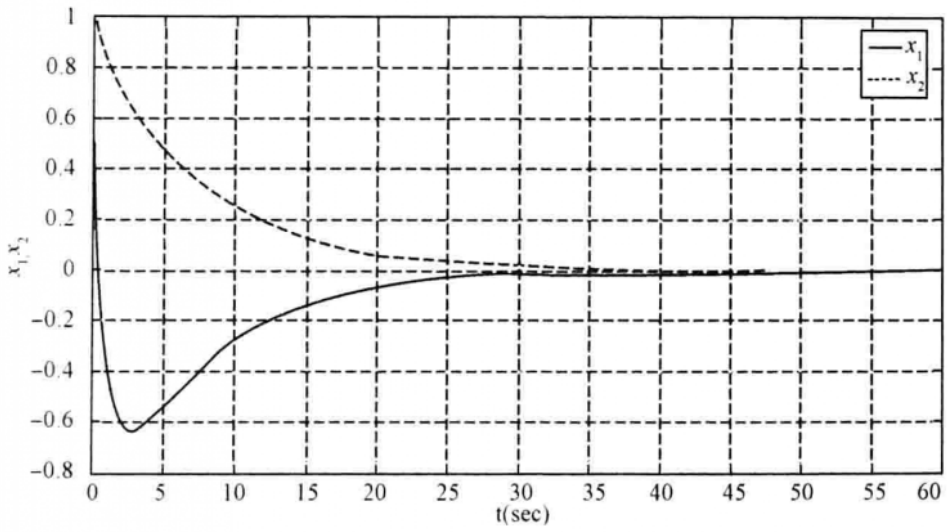


图 8.7　状态响应曲线

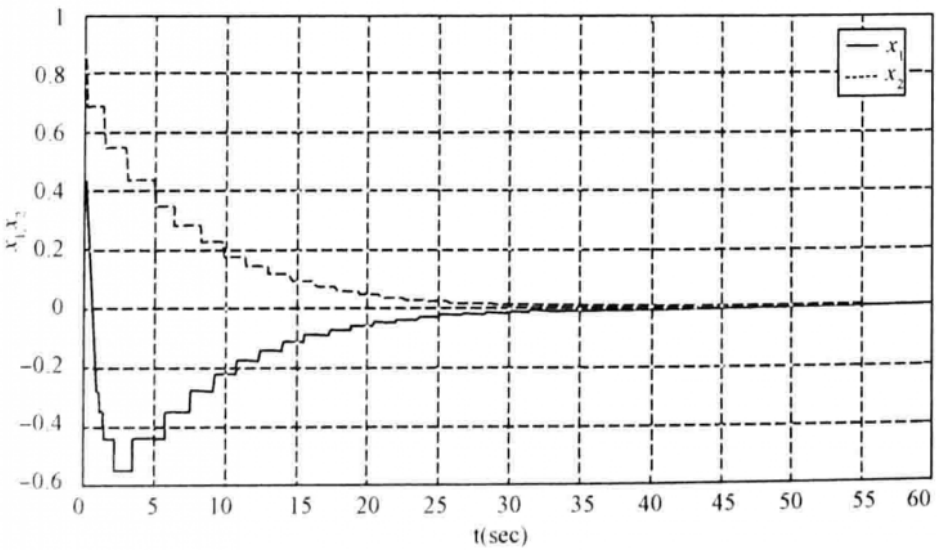


图 8.8　量化状态响应曲线

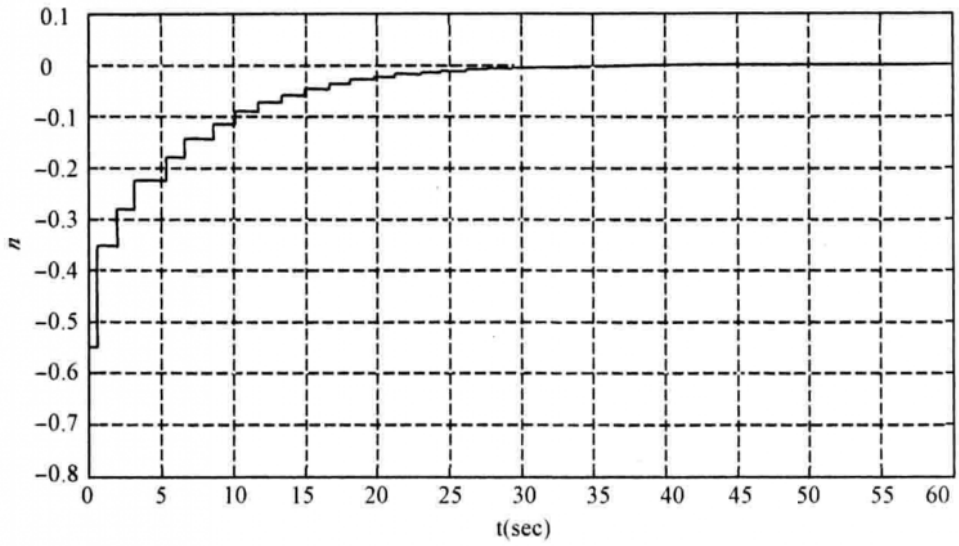


图 8.9　量化控制输入曲线

图 8.10、图 8.11 和图 8.12 分别给出了系统状态、量化状态和量化控制输入的响应曲线。从仿真曲线可以看出，算法 8.1 给出的控制器可以保证闭环系统稳定。

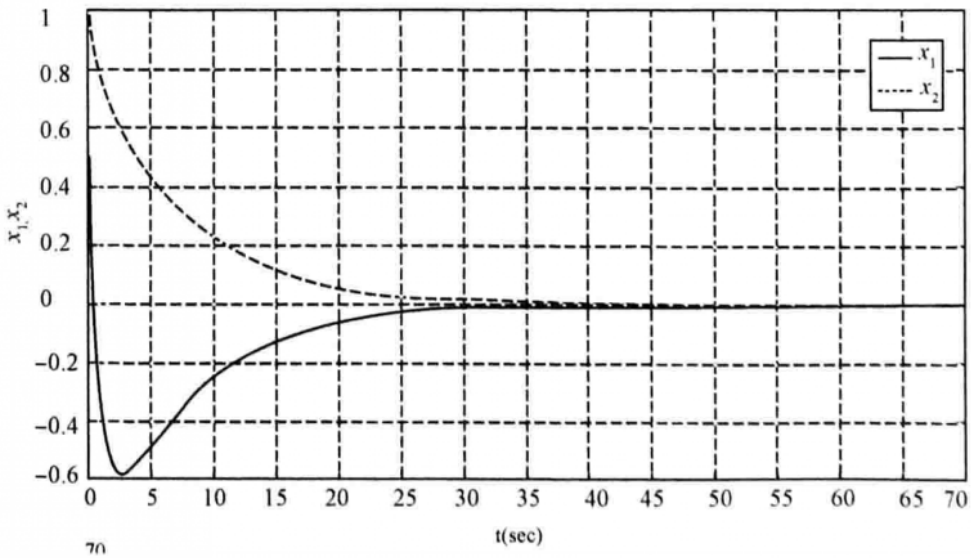


图 8.10　状态响应曲线

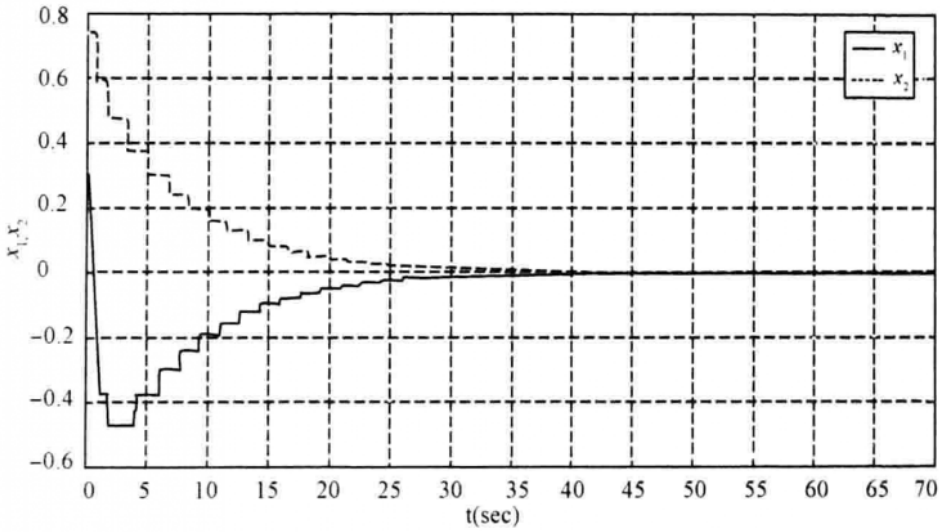


图 8.11　量化状态响应曲线

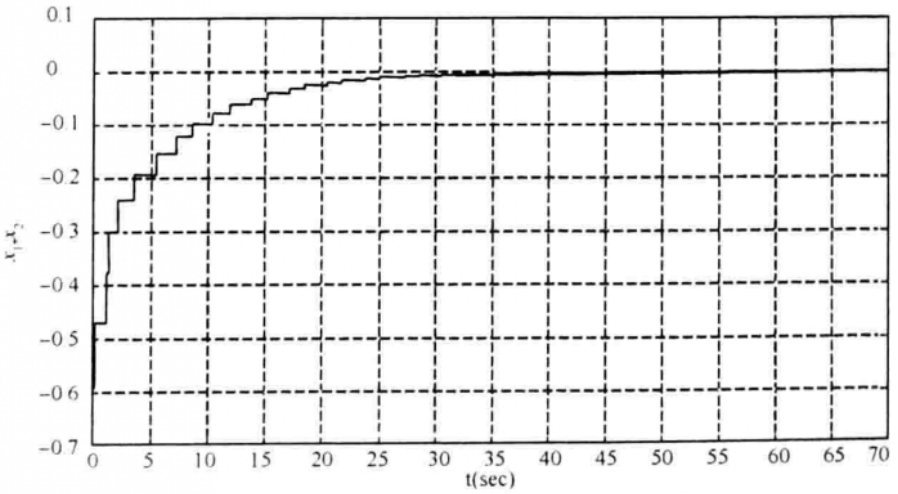


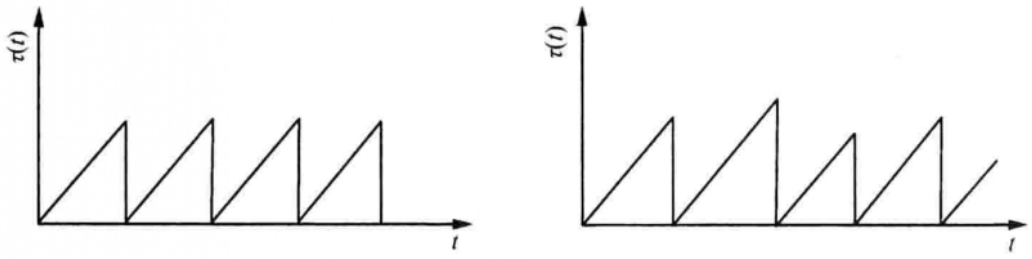
图 8.12　量化控制输入曲线

8.3　基于脉冲时滞系统模型的网络控制系统分析

8.1 节已经研究了网络控制闭环系统的稳定性分析问题，其中将采样、丢包和网络传输时滞的影响归结为区间时变时滞，但是仔细分析会发现这种建模方法实际上忽略了网络控制系统的以下一些特点：

(1)锯齿形时变时滞。

当考虑采样和网络传输时滞的影响时，系统所具有的时变时滞具有锯齿形，且时滞变化率固定为 1。图 8.13 给出了锯齿形时变时滞的图示，其中图 8.13(a)为定常采样无时滞情况，图 8.13(b)为变采样变时滞情况。



(a)定常采样无时滞　　(b) 变采样变时滞

图 8.13　锯齿形时变时滞

(2)控制输入的脉冲特性。

网络控制系统由于采样保持器的作用，使得其中的控制信号仅在更新时刻与系统状态同步，而在更新时刻之间保持不变。这使得控制信号呈现脉冲特性。

如果充分利用网络控制系统的以上两个特点，可以进一步降低稳定性分析的保守性。仍然考虑图 8.1 中的网络控制系统(8.1)，但是将该系统建模为如下的脉冲时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{v}(t),\\ \boldsymbol{v}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{x}(s_k),t_k\leqslant t<t_{k+1},\\ \boldsymbol{x}(s_{k+1}),t=t_{k+1},\end{cases}\end{cases}\tag{8.47}$$

根据图 8.2，令 $\rho_1=t-s_k$，$\rho_2=t-t_k$，可得

$$(\tau_{\min},\tau_{\min},0)\leqslant(\rho_1-\rho_2,\rho_1,\rho_2)\leqslant(\tau_{\max},\tau_{\mathrm{MATI}},\tau_{\mathrm{MATI}}-\tau_{\min}),$$

其中 $\tau_{\mathrm{MATI}}=\tau_{\max}+h_{\max}$ 为最大容许传输间隔，$h_{\max}$ 为最大采样周期。采用如下 LKF：

$$\begin{aligned}V=&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+(\bar{\rho}_1-\rho_1)\int_{t-\rho_1}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\\&(\bar{\rho}_2-\rho_2)\int_{t-\rho_2}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\int_{t-\tau_{\min}}^{t}(\tau_{\min}-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\\&\int_{t-\rho_1}^{t-\tau_{\min}}(\bar{\rho}_1-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+(\bar{\rho}_1-\tau_{\min})\int_{t-\tau_{\min}}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}_s\mathrm{d}s+\end{aligned}$$

$$\int_{t-\tau_{\min}}^{t} \boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{x}_s \mathrm{d}s + (\bar{\rho}_1 - \rho_1) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix},$$

其中设置 $\bar{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 \\ * & \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，可以保证当 $\rho_2 = 0$ 时式(8.48)的最后一项变为零，且比文[208-209]所采用方法具有更大的自由度。

计算 LKF(8.48)的微分为：

$$\begin{aligned}
\dot{V} = {} & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{x}} + (\bar{\rho}_1 - \rho_1) \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{x}} - \int_{t-\rho_1}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s + (\bar{\rho}_2 - \rho_2) \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_2 \dot{\boldsymbol{x}} \\
& - \int_{t-\rho_2}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_2 \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s + \tau_{\min} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_3 \dot{\boldsymbol{x}} - \int_{t-\tau_{\min}}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_3 \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s - \int_{t-\rho_1}^{t-\tau_{\min}} \dot{\boldsymbol{x}}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_4 \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \\
& + (\bar{\rho}_1 - \tau_{\min}) \dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau_{\min}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau_{\min}} + (\bar{\rho}_1 - \tau_{\min}) \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{x}} \\
& - (\bar{\rho}_1 - \tau_{\min}) \dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau_{\min}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{x}}_{t-\tau_{\min}} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{t-\tau_{\min}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{x}_{t-\tau_{\min}} \\
& - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix} + 2(\bar{\rho}_1 - \rho_1) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\
\leqslant {} & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} [(\bar{\rho}_1 - \rho_1) \boldsymbol{R}_1 + (\bar{\rho}_2 - \rho_2) \boldsymbol{R}_2 + \tau_{\min} \boldsymbol{R}_3 + (\bar{\rho}_1 - \tau_{\min}) \boldsymbol{R}_4] \\
& \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{t-\tau_{\min}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{x}_{t-\tau_{\min}} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix} \\
& + 2(\bar{\rho}_1 - \rho_1) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{t-\rho_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau_{\min}} \left(\int_{t-\tau_{\min}}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_3 \left(\int_{t-\tau_{\min}}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s \right) \\
& - (\rho_1 - \rho_2) \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{v}_1 - \rho_2 \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) \boldsymbol{v}_2 - (\rho_1 - \tau_{\min}) \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_4 \boldsymbol{v}_3,
\end{aligned} \tag{8.49}$$

其中 $\boldsymbol{v}_1 = \int_{t-\rho_1}^{t-\rho_2} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s / (\rho_1 - \rho_2)$，$\boldsymbol{v}_2 = \int_{t-\rho_2}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s / \rho_2$，$\boldsymbol{v}_3 = \int_{t-\rho_1}^{t-\tau_{\min}} \dot{\boldsymbol{x}}_s \mathrm{d}s / (\rho_1 - \tau_{\min})$。

令 $\boldsymbol{\xi} = \mathrm{col}\{\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{t-\rho_1}, \boldsymbol{x}_{t-\rho_2}, \boldsymbol{x}_{t-\tau_{\min}}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$，可得如果 $\boldsymbol{\Xi}(\rho_1 - \rho_2, \rho_1, \rho_2) < 0$，且满足约束：$\boldsymbol{S}(\rho_1 - \rho_2, \rho_1, \rho_2)\boldsymbol{\xi} = 0$，则闭环系统稳定。

这样，根据 Finsler 引理，可得如下稳定性判据。

定理 8.6　如果存在适维矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$，$\boldsymbol{Z} > 0$，$\boldsymbol{R}_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$，$\bar{\boldsymbol{X}} > 0$ 和 $\boldsymbol{X}$，使得式(8.50)对于 $(\rho_1 - \rho_2, \rho_1, \rho_2) = (\tau_{\min}, \tau_{\min}, 0)$ 和

$(\tau_{\max},\tau_{\mathrm{MATI}},\tau_{\mathrm{MATI}}-\tau_{\min})$均成立，则系统(8.47)渐近稳定。

$$\boldsymbol{\Psi}(\rho_1-\rho_2,\rho_1,\rho_2)=\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}<0, \tag{8.50}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}=&2\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}[(\bar{\rho}_1-\rho_1)\boldsymbol{R}_1+(\bar{\rho}_2-\rho_2)\boldsymbol{R}_2+\tau_{\min}\boldsymbol{R}_3+(\bar{\tau}_1-\tau_{\min})\boldsymbol{R}_4]\\&\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{e}_5-\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}\\&+(\bar{\rho}_1-\rho_1)\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_4\end{bmatrix}\right\}\\&-\frac{1}{\tau_{\min}}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_5)-(\rho_1-\rho_2)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_6\\&-\rho_2\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{e}_7-(\rho_1-\tau_{\min})\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{e}_8,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}_d&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&-(\rho_1-\rho_2)\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\rho_2\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&-(\rho_1-\tau_{\min})\boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

下面考虑一个数值算例，用以比较本节提出的方法和已有结果[208]。

例 8.3 考虑如下系统，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\0&-0.1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}-3.75&-11.5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

其中控制信号 $\boldsymbol{u}(t)$通过网络反馈。

对于不同 $\tau_{\min}$ 和 $\tau_{\max}$，由定理 8.6，可以计算最大 τ_{MATI}。在图 8.14 中比较了定理 8.6 与其他已有结果[208]。其中，实线代表对于不同的 $\tau_{\min}$ 和 $\tau_{\max}$，不同方法所取得的最大 τ_{MATI}。不同颜色的虚线代表不同方法所取得的最大 τ_{MATI}。从图 8.14 中可以看出，由定理 8.6 可以取得更小保守性的结果，特别是大大改进了定理 8.1 的结果，从而验证了采用脉冲时滞系统模型而非区间时滞系统模型的优势。

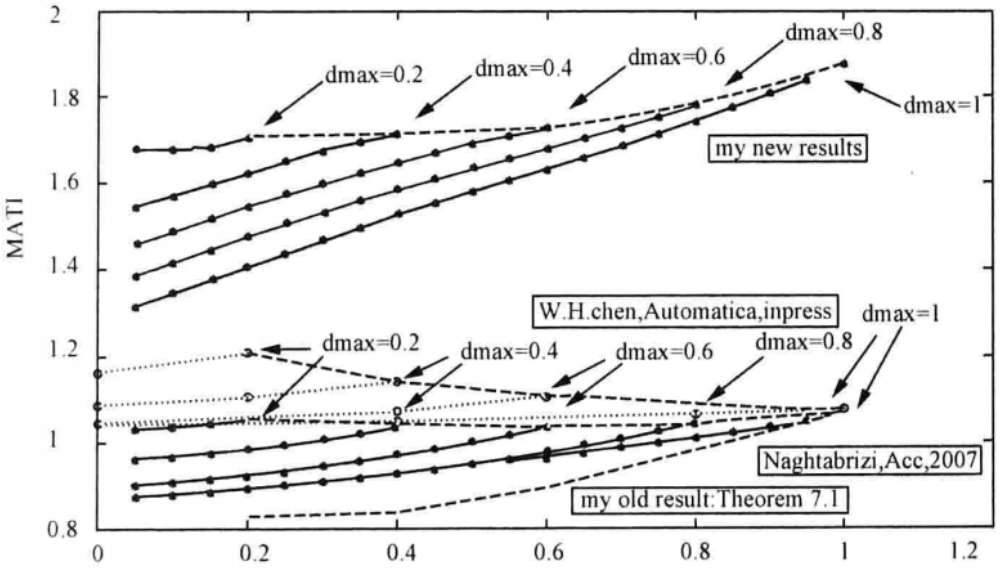


图 8.14　对于不同 $\tau_{\min}$ 和 $\tau_{\max}$ 的最大 τ_{MATI}

参考文献

[1] Niculescu S. I. Delay effects on stability: A robust control approach. Springer Verlag, 2001.

[2] Gao S., Teng Z., Nieto J. J. et al. Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay. Journal of Biomedicine and Biotechnology, 2007, 2: 1-10.

[3] Koumboulis F. M., Kouvakas N. D., Paraskevopoulos P. N. Analytic modeling and metaheuristic PID control of a neutral time delay test case central heating system. WSEAS Trans. on Systems and Control, 2008, 3 (11): 967-981.

[4] Louisell J. New examples of quenching in delay differential equations having time-varying delay. Proceedings of the 4th European Control Conference. Karlsruhe, Germany, 1999: 1023-1.

[5] Papachristodoulou A., Peet M. M., Niculescu S. I. Stability analysis of linear systems with time-varying delays: Delay uncertainty and quenching. Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA, 2007: 2117-2122.

[6] Gouaisbaut F., Peaucelle D. Stability of time-delay systems with non-small delay. 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA, 2006: 840-845.

[7] Kolmanovski V. B., Myshkis A. D., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations. Springer, 1992.

[8] Yu M., Wang L., Chu T. et al. Stabilization of Networked Control Systems with Data Packet Dropout and Transmission Delays: Continuous-Time Case. European Journal of Control, 2005, 11: 40-49.

[9] Michiels W., Niculescu S. I. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2007.

[10] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Bos-

ton: Birkhauser, 2003.

[11] Fridman E. Descriptor discretized Lyapunov functional method: Analysis and design. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51 (5): 890-897.

[12] Han Q. L., Gu K. Stability of linear systems with time-varying delay: a generalized discretized Lyapunov functional approach. Asian Journal of Control, 2001, 3 (3): 170-180.

[13] Fridman E. Stability of Systems With Uncertain Delays: A New Complete-Lyapunov-Krasovskii Functional. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51 (5): 885-890.

[14] Papachristodouiou A., Prajna S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. 41th IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA, 2002: 3482-3487.

[15] Papachristodoulou A., Peet M., Lall S. Constructing Lyapunov-Krasovskii functionals for linear time delay systems. IEEE American Control Conference, 2005: 2845-2850.

[16] Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[17] Zhang J., Knopse C. R., Tsiotras P. Stability of time-delay systems: Equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46 (3): 483-486.

[18] Bliman P. A. LMI characterization of the strong delay-independent stability of linear delay systems via quadratic Lyapunov-Krasovskii functionals. Systems & Control Letters, 2001, 43 (4): 263-274.

[19] Megretski A., Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42 (6): 819-830.

[20] Jun M., Safonov M. G. IQC robustness analysis for time-delay systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2001, 11 (15): 1455-1468.

[21] Jun M., Safonov M. G. Rational multiplier IQCs for uncertain time-delays and LMI stability conditions. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47 (11): 1871-1875.

[22] Kao C. Y., Rantzer A. Stability analysis of systems with uncertain time-va-

rying delays. Automatica, 2007, 43 (6): 959-970.

[23] Scherer C. W., K se I. E. Robustness with dynamic IQCs: An exact state-space characterization of nominal stability with applications to robust estimation. Automatica, 2008, 44 (7): 1666-1675.

[24] Scherer C. W., Kose I. E. Robust H2 estimation with dynamic IQCs: A convex solution. 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA 2006: 4746-4751.

[25] Roozbehani M., Knospe C. R. A mixed IQC approach to nonlinear delay-dependent system analysis. American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004: 4177-4182.

[26] Iwasaki T., Hara S. Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43 (5): 619.

[27] Gouaisbaut F., Peaucelle D. A note on stability of time delay systems. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND06). Toulouse, France, 2006.

[28] Ariba Y., Gouaisbaut F., Peaucelle D. Stability analysis of time-varying delay systems in quadratic separation framework. The International conference on mathematical problems in engineering, aerospace and sciences (ICNPAA08). Genoa, Italie, 2008.

[29] 张红强，刘健辰．基于二次分离方法的时变时滞系统稳定性分析．控制与决策，2011，26 (10)：1596-1600.

[30] Gu K., Niculescu S. I. Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46 (3): 497-500.

[31] Fridman E., Shaked U. A descriptor system approach to H∞ control of linear time-delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47 (2): 253-270.

[32] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44 (4): 876-877.

[33] Moon Y. S., Park P., Kwon W. H. et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. International Journal of Control,

2001，74 (14)：1447-1455.

[34] He Y.，Wu M.，She J. et al. Parameter-dependent Lyapunov Functional for Stability of Time-delay Systems with Polytopic-type Uncertainties. IEEE Transactions on Automatic Control，2004，49 (5)：828-832.

[35] He Y.，Wang Q.，Lin C. et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. Automatica，2007，43 (2)：371-376.

[36] 张先明．基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究．长沙：中南大学，2006.

[37] Zhang X.，Han Q. Delay-Dependent Robust H∞ Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems With Time-Varying Delay Based on a Finite Sum Inequality. IEEE Transactions on Circuits and Systems II：Express Briefs，2006，53 (12)：1466-1470.

[38] Zhang X.，Han Q. Robust H∞ filtering for a class of uncertain linear systems with time-varying delay. Automatica，2008，44 (1)：157-166.

[39] Zhang X.，Han Q. A new finite sum inequality approach to delay-dependent H∞ control of discrete-time systems with time-varying delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2008，18 (6)：630-647.

[40] Zhang X.，Han Q.，Wu M. A New Finite Sum Inequality for Delay-Dependent H∞ Control of Discrete-Time Delay Systems. Intelligent Control and Automation，2006. WCICA 2006. The Sixth World Congress on，2006：364-368.

[41] Han Q. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity. Automatica，2005，41 (12)：2171-2176.

[42] Zhang D.，Yu L. Equivalence of some stability criteria for linear time-delay systems. Applied Mathematics and Computation，2008，202 (1)：395-400.

[43] Xu S.，Lam J. On Equivalence and Efficiency of Certain Stability Criteria for Time-Delay Systems. IEEE Transactions on Automatic Control，2007，52 (1)：95-101.

[44] Fridman E.，Shaked U. An Improved Stabilization Method for Linear Time-Delay Systems. IEEE Transactions on Automatic Control，2002，47 (11)：1931-1937.

[45] Jing X.，Tan D.，Wang Y. An LMI approach to stability of systems with severe time-delay. IEEE Transactions on Automatic Control，2004，49 (7)：

1192-1195.

[46] Lee Y. S. , Moon Y. S. , Kwon W. H. et al. Delay-dependent robust H∞ control for uncertain systems with a state-delay. Automatica, 2004, 40 (1): 65-72.

[47] Suplin V. , Fridman E. , Shaked U. A projection approach to H∞ control of time-delay systems. Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control. Atlantis, 2004: 4548-4553.

[48] Wu M. , He Y. , She J. et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. Automatica, 2004, 40 (8): 1435-1439.

[49] Xu S. , Lam J. Improved Delay-dependent Stability Criteria for Time-delay Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50 (3): 384-387.

[50] Xu S. , Lam J. , Zou Y. Simplified descriptor system approach to delay-dependent stability and performance analyses for time-delay systems. IEE Proceedings Control Theory & Applications 2005, 152 (2): 147-151.

[51] Sun J. , Liu G. P. , Chen J. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19 (12): 1364-1375.

[52] Sun J. , Liu G. P. , Chen J. et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays. Automatica, 2010, 46 (2): 466-470.

[53] Ariba Y. , Gouaisbaut F. An augmented model for robust stability analysis of time-varying delay systems. International Journal of Control, 2009, 82 (9): 1616-1626.

[54] El Ghaoui L. , Oustry F. , AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for staticoutput-feedback and related problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42 (8): 1171-1176.

[55] Leibfritz F. An LMI-Based Algorithm for Designing Suboptimal Static H_2/H_∞ Output Feedback Controllers. SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, 39: 1711-1735

[56] He Y. , Wu M. , Liu G. et al. Output Feedback Stabilization for a Discrete-Time System With a Time-Varying Delay. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53 (10): 2372-2377.

[57] Liu P. Exponential stability for linear time-delay systems with delay dependence. Journal of the Franklin Institute, 2003, 340 (6-7): 481-488.

[58] Liu P. Robust exponential stability for uncertain time-varying delay systems with delay dependence. Journal of the Franklin Institute, 2009, 346 (10): 958-968.

[59] Amato F. Robust control of linear systems subject to uncertain time-varying parameters. Springer Verlag, 2006.

[60] Han Q., Yue D. Absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay. IET Control Theory & Applications, 2007, 1 (3): 854-859.

[61] Wu M., Feng Z. Y., He Y. et al. Improved delay-dependent absolute stability and robust stability for a class of nonlinear systems with a time-varying delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20 (6): 694-702.

[62] Chen Y., Guo Y., Bi W. New Results on Absolute Stability of Lur'e Systems with Time-varying Delay. Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, China, 2008: 5483-5486.

[63] Park P., Wan Ko J. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay. Automatica, 2007, 43 (10): 1855-1858.

[64] Xu S., Lam J., Mao X. Delay-dependent H • control and filtering foruncertain Markovian jump systems with time-varying delays. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54 (9): 2070-2077.

[65] Wang J., Luo Y. Further improvement of delay-dependent stability for Markov jump systems with time-varying delay. Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008:: 6319-6324.

[66] Zhao X. D., Zeng Q. S. Delay-dependent stability analysis for Markovian jump systems with interval time-varying-delays. International Journal of Automation and Computing, 2010, 7 (2): 224-229.

[67] Han Q. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems. Automatica, 2009, 45 (2): 517-524.

[68] Xie L. Output feedback H∞ control of systems with parameter uncertainty. International Journal of Control, 1996, 63 (4): 741-750.

[69] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E. et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Studies in Applied Mathematics. Vol. 15. Philadelphia, USA: SIAM, 1994.

[70] Oliveira M. C., Skelton R. E. Stability tests for constrained linear systems. in Perspectives in Robust Control, S. O. R. Moheimani, Editor. 2001. Springer: London.

[71] 刘健辰，章兢，张红强 等．时滞系统稳定性分析和镇定：一种基于 Finsler 引理的统一观点．控制理论与应用，2011，28 (11)：1577-1582.

[72] Skelton R., Iwazaki T., Grigoriadis K. A unified algebraic approach to linear control design. series in systems and control. London: Taylor and Francis, 1998.

[73] Shao H. Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay varying in a range. Automatica, 2008, 44 (12): 3215-3218.

[74] Shao H. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay. Automatica, 2009, 45 (3): 744-749.

[75] Wu Y. Y., Wu Y. Q., Chen Y. G. Mean square exponential stability of uncertain stochastic neural networks with time-varying delay. Neurocomputing, 2009, 72 (10-12): 2379-2384.

[76] Peaucelle D. Integral Quadratic Separation applied to polytopic systems. IFAC Symposium on Robust Control Design. Haifa, 2009.

[77] Zhang J., Knospe C. R., Tsiotras P. Toward less conservative stability analysis of time-delay systems. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, AZ 1999: 2017-2022

[78] Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, 2004: 284-289.

[79] Labit Y., Peaucelle D., Henrion D. SeDuMi interface 1.02: a tool for solving LMI problems with SeDuMi. 2002 IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design, 2002: 272-277.

[80] Yue D., Tian E., Zhang Y. A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19 (13): 1493-1518.

[81] Ariba Y., Gouaisbaut F. Construction of Lyapunov-Krasovskii functional

for time-varying delay systems. Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on. Cancun, 2008: 3995-4000.

[82] Jiang X., Han Q. L. Networked-induced delay-dependent H_∞ controller design for a class of networked control systems. Asian Journal of Control, 2006, 8 (2): 97-106.

[83] Yue D., Han Q. L., Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty. Automatica, 2005, 41 (6): 999-1007.

[84] Gao H., Lam J., Wang C. et al. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. IEE Proceedings Control Theory & Applications, 2004, 151 (6): 691-698.

[85] Liu X., Martin R., Tang M. Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay. IET Proc. Control Theory Appl., 2006, 153 (6): 689-702.

[86] Jiang X., Han Q. L., Yu X. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay. Proceedings of the American Control Conference, 2005: 2817-2822

[87] Gao H., Chen T. New Results on Stability of Discrete-Time Systems With Time-Varying State Delay. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52 (2): 328-334.

[88] Fridman E., Shaked U. Delay-dependent H_∞ control of uncertain discrete delay systems. European Journal of Control, 2005, 11 (1): 29-37.

[89] Zhu X. L., Yang G. H. Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. American Control Conference, 2008 Seattle, WA 2008: 1644-1649

[90] Shao H., Han Q. L. New stability criterion for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56 (3): 619-625.

[91] Park P., Ko J. W., Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. Automatica, 2011, 47 (1): 235-238.

[92] 刘健辰，章兢，张红强 等. 时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的鲁棒稳定性. 控制与决策, 2011, 26 (5): 667-672+678.

[93] Briat C. Robust Control and Observation of LPV Time-Delay Systems: Grenoble INP, France, 2008.

[94] Gu K. Partial solution of LMI in stability problem of time-delay systems. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, Arizona, USA, 1999: 227-232.

[95] Liu J., Zhang J. Note on stability of discrete-time time-varying delay systems. IET Control Theory & Applications, 2012, 6 (2): 335-337.

[96] Liu J., Zhang J., He M. et al. New results on robust H_∞ control for discrete-time systems with interval time-varying delays. Journal of Control Theory and Applications, 2011, 9 (4): 611-616.

[97] Han Q. Improved stability criteria and controller design for linear neutral systems. Automatica, 2009, 45 (8): 1948-1952.

[98] Zhang B., Xu S., Zou Y. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems. Automatica, 2008, 44 (11): 2963-2967.

[99] Misra V., Gong W. B., Towsley D. Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED. ACM SIGCOMM Computer Communication Review. Stockholm, 2000: 151-160.

[100] Hollot C. V., Misra V., Towsley D. et al. A control theoretic analysis of RED. Proc IEEE INFOCOM. Alaska, USA, 2001: 1510-1519.

[101] Hollot C. V., Misra V., Towsley D. et al. On designing improved controllers for AQM routers supporting TCP flows. Proc IEEE INFOCOM. Alaska, USA, 2002: 1726-1734.

[102] 刘明，窦文华，张鹤颖．主动队列管理机制中 PI 算法的一种参数配置方法．国防科技大学学报，2005，27 (3)：115-119.

[103] 蔡小玲，汪小帆，王执铨．主动队列管理中 PI 控制的分析与改进．南京理工大学学报，2005，29 (3)：368-374.

[104] 杨吉文，顾诞英，张卫东．鲁棒性可调的主动队列管理 PI 控制器的解析设计．上海交通大学学报，2007，41 (5)：788-796.

[105] 任丰原，王福豹，任勇 等．主动队列管理中的 PID 控制器．电子与信息学报，2003，25 (1)：94-99.

[106] 陆锦军，王执铨．基于粒子群优化的网络拥塞控制新算法．电子学报，2007，35 (8)：1446-1451.

[107] Chen Q., Yang O. W. W. Robust controller design for AQM router. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2007, 52 (5): 938-943.

[108] Kim K. B. Design of feedback controls supporting TCP based on the state-space approach. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2006, 51 (7): 1086-1099.

[109] Zheng F., Nelson J. An H_∞ approach to the controller design of AQM routers supporting TCP flows. Automatica, 2009, 45 (3): 757-763.

[110] Hadjadj Aoul Y., Mehaoua A., Skianis C. A fuzzy logic-based AQM for real-time traffic over internet. Computer networks, 2007, 51 (16): 4617-4633.

[111] Labit Y., Ariba Y., Gouaisbaut F. Design of Lyapunov based controllers as TCP AQM. 2nd IEEE Workshop on Feedback control implementation and design in computing systems and networks 2007: 45-50.

[112] Chen J. On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40 (6).

[113] Gouaisbaut F., Peaucelle D. Robust stability of polytopic time-delay systems with delays defined in intervals. AAS Technical Report N° 08427. 2008.

[114] Park P. G., Ko J. W., Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. Automatica, 2011, 47 (1): 235-238.

[115] Zhang Y., Peet M., Gu K. Reducing the Complexity of the Sum-of-Squares Test for Stability of Delayed Linear Systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2011, 56 (1): 229-234.

[116] Kim J. H. Note on stability of linear systems with time-varying delay. Automatica, 2011, 47 (9): 2118-2121.

[117] Kwon O. M., Park J. H. Comments on " Robust exponential stability for uncertain time-varying delay systems with delay dependence". Journal of the Franklin Institute, 2010, 347 (3): 589-590.

[118] Kharitonov V., Mondie S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50 (5): 666-670.

[119] Yu J., Tan W., Mo Y. Robust exponential stability analysis for neutral delay systems with uncertainties. Control and Automation, 2009. ICCA 2009. IEEE International Conference on, 2009: 2205-2210.

[120] Liao X., Yu P. Absolute stability of nonlinear control systems. Springer

Verlag, 2008.

[121] Bliman P. A. Lyapunov-Krasovskii functionals and frequency domain: delay-independent absolute stability criteria for delay systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2001, 11 (8): 771-788.

[122] Bliman P. -A. Absolute stability criteria with prescribed decay rate for finite-dimensional and delay systems. Automatica, 2002, 38 (11): 2015-2019.

[123] He Y., Wu M., She J. H. et al. Robust stability for delay Lur'e control systems with multiple nonlinearities. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 176 (2): 371-380.

[124] Gao J., Su H., Ji X. et al. New Delay-dependent Absolute Stability Criteria for Lurie Control Systems. Acta Automatica Sinica, 2008, 34 (10): 1275-1280.

[125] 杨斌，王金城．中立型一般 Lurie 系统绝对稳定的时滞相关准则．自动化学报，2004，30 (2)：261-264.

[126] Xu B., Wang Q. LMI approach for absolute stability of general neutral type Lurie indirect control systems. Journal of Control Theory and Applications, 2005, 3 (4): 387-392.

[127] Han Q. L. A new delay-dependent absolute stability criterion for a class of nonlinear neutral systems. Automatica, 2008, 44 (1): 272-277.

[128] 李明，刘龙．中立型时滞系统的新的绝对稳定性的法则．控制理论与应用，2009，26 (5)：582-587.

[129] Botmart T., Niamsup P. Robust exponential stability and stabilizability of linear parameter dependent systems with delays. Applied Mathematics and Computation, 2010.

[130] 刘健辰，章兢，张红强 等．改进的时变时滞中立型系统的绝对稳定性判据．控制与决策，2011，26 (7)：1026-1030+1035.

[131] Khalil H. K., Grizzle J. W. Nonlinear systems. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1996.

[132] Mariton M. Jump linear systems in automatic control. CRC, 1990.

[133] Ji Y., Chizeck H. J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35 (7): 777-788.

[134] Feng X., Loparo K. A., Ji Y. et al. Stochastic stability properties of jump linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37 (1): 38-53.

[135] Benjelloun K., Boukas E. K. Mean square stochastic stability of linear time-delay system with Markovian jumping parameters. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43 (10): 1457.

[136] Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47 (10): 1604-1612.

[137] Xu S., Chen T., Lam J. Robust Hinf filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48 (5): 900-907.

[138] Boukas E. K., Liu Z. K., Shi P. Delay-dependent stability and output feedback stabilisation of Markov jump system with time-delay. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 2002, 149: 379-386.

[139] Chen W. H., Xu J. X., Guan Z. H. Guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48 (12): 2270-2277.

[140] Cao Y. Y., Hu L. S., Xue A. A new delay-dependent stability condition and H_∞ control for jump time-delay systems. Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston, 2004: 4183-4188.

[141] Cao Y. Y., Lam J., Hu L. Delay-dependent stochastic stability and H_∞ analysis for time-delay systems with Markovian jumping parameters. Journal of the Franklin Institute, 2003, 340 (6-7): 423-434.

[142] Wu J., Chen T., Wang L. Delay-dependent robust stability and H_∞ control for jump linear systems with delays. Systems & Control Letters, 2006, 55 (11): 939-948.

[143] Fei Z., Gao H., Shi P. New results on stabilization of Markovian jump systems with time delay. Automatica, 2009, 45 (10): 2300-2306.

[144] Boukas E. K., Liu Z. K. Robust control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46 (12): 1919-1924.

[145] Chen W. H., Guan Z. H., Yu P. Delay-dependent stability and H_∞ control

of uncertain discrete-time Markovian jump systems with mode-dependent time delays. Systems & Control Letters, 2004, 52 (5): 361-376.

[146] Boukas E. K., Liu H. Delay-dependent stabilization of stochastic discrete-time systems with time-varying time-delay. Proceedings of the American Control Conference, 2007: 2448-2453.

[147] Wu Z., Zhou W. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain singular time-delay systems. Control Theory & Applications, IET, 2007, 1 (5): 1234-1241.

[148] Ma S., Cheng Z., Zhang C. Delay-dependent robust stability and stabilisation for uncertain discrete singular systems with time-varying delays. Control Theory & Applications, IET, 2007, 1 (4): 1086-1095.

[149] Du Z., Qiu Z., Zhang Q. et al. New delay-dependent robust stability of discrete singular systems with time-varying delay. Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on, 2008: 6359-6364.

[150] Lam J., Shu Z., Xu S. et al. Robust H_∞ control of descriptor discrete-time Markovian jump systems. International Journal of Control, 2007, 80 (3): 374-385.

[151] Ma S., Liu X., Zhang C. Delay-dependent stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump singular systems with time delay. The ANZIAM Journal, 2009, 49 (01): 111-129.

[152] Ma S., Zhang C. Robust stability and H_∞ control for uncertain discrete Markovian jump singular systems with mode-dependent time-delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19 (9): 965-985.

[153] Ma S., Boukas E. K. Robust H_∞ filtering for uncertain discrete Markov jump singular systems with mode-dependent time delay. Control Theory & Applications, IET, 2009, 3 (3): 351-361.

[154] Zhou W., Lu H., Duan C. et al. Delay-dependent robust control for singular discrete-time Markovian jump systems with time-varying delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control: to be published.

[155] Ma S., Boukas E. K., Chinniah Y. Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20 (5): 531-543.

[156] Liu J., zhang J., Zhang H. et al. Further improvement of stability criterion and BRL for Markovian jump systems with interval time-varying delay. Journal of Control Theory and Applications, 2012, 10 (3): 123-128.

[157] 刘健辰，章兢．具有时变输入与状态时滞的 Markov 跳变系统鲁棒 H_∞ 控制．控制理论与应用，2010，27 (6)：809-814.

[158] 刘健辰，章兢．输入时滞 Markov 跳变系统鲁棒保性能控制及其仿真研究．系统仿真学报，2010，22 (5)：1195-1198.

[159] Waner S., Costenoble S. R. Markov system simulation. Available from: http://people.hofstra.edu/faculty/StefanWaner/RealWorld/markov/markov.

[160] 何朕，王毅，孟范伟 等．马尔可夫跳变系统的蒙特卡罗仿真．电机与控制学报，2008，12 (1)：80-83.

[161] Boukas E. K., Liu Z. K., Liu G. X. Delay-dependent robust stability and H_∞ control of jump linear systems. International Journal of Control, 2001, 74 (4): 329-340.

[162] 刘健辰，章兢．具有区间时变时滞的离散 Markov 跳变系统鲁棒 H_∞ 控制．控制与决策，2009，24 (11)：1647-165+1656.

[163] He Y., Wang Q. G., Lin C. et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. Automatica, 2007, 43 (2): 371-376.

[164] 林元烈．应用随机过程．北京：清华大学出版社，2002.

[165] Boukas E. K. Stochastic Switching Systems: Analysis and Design. Boston, MA: Birkhauser, 2005.

[166] Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1985, 15 (1): 116-132.

[167] Cao Y. Y., Frank P. M. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8 (2): 200-211.

[168] Tian E., Peng C. Delay-dependent stability analysis and synthesis of uncertain TS fuzzy systems with time-varying delay. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157 (4): 544-559.

[169] Peng C., Tian Y. C., Tian E. Improved delay-dependent robust stabilization conditions of uncertain TS fuzzy systems with time-varying delay.

Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159 (20): 2713-2729.

[170] Li C., Wang H., Liao X. Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays. IEE Proc.-Control Theory Appl. 2004, 151 (4): 417.

[171] Wu H. N. Delay-dependent H_∞ fuzzy observer-based control for discrete-time nonlinear systems with state delay. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159 (20): 2696-2712.

[172] Yan-Bin L. U. O., Yong-yan G. A. O., You-Xian S. U. N. Robust Stability of Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time-varying Input-delay. Acta Automatica Sinica (S0254-4156), 2008, 34 (1): 87-92.

[173] Lin C., Wang Q. G., Heng Lee T. Delay-dependent LMI conditions for stability and stabilization of TS fuzzy systems with bounded time-delay. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157 (9): 1229-1247.

[174] Lien C. H., Yu K. W. Robust control for Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying state and input delays. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 35 (5): 1003-1008.

[175] Chen B., Liu X., Tong S. Robust fuzzy control of nonlinear systems with input delay. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 37 (3): 894-901.

[176] Li L., Liu X. New results on delay-dependent robust stability criteria of uncertain fuzzy systems with state and input delays. Information Sciences, 2009, 179 (8): 1134-1148.

[177] Li L., Liu X. D., Yang X. G. Robust control for Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-delays in states and inputs. Control Theory and Applications, 2008, 25 (4): 645-649.

[178] Chen B., Liu X., Tong S. et al. Guaranteed cost control of T-CS fuzzy systems with state and input delays. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158 (20): 2251-2267.

[179] Chen B., Lin C., Liu X. et al. Guaranteed cost control of TS fuzzy systems with input delay. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008, 18 (12): 1230-1256.

[180] Yu K. W., Lien C. H. Robust H_∞ control for uncertain TS fuzzy systems with state and input delays. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 37 (1): 150-156.

[181] Liu J., Zhang J., Zheng Y. et al. Robust H_∞ control for discrete-time T-S fuzzy systems with input delay. Journal of Control Theory and Applications, 2011, 9 (2): 189-194.

[182] Chen C. L., Feng G., Guan X. P. Delay-Dependent Stability Analysis and Controller Synthesis for Discrete-Time TS Fuzzy Systems With Time Delays. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2005, 13 (5).

[183] Wu H. N. Brief paper: An ILMI approach to robust H_2 static output feedback fuzzy control for uncertain discrete-time nonlinear systems. Automatica, 2008, 44 (9): 2333-2339.

[184] Tanaka K., Wang H. O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. Wiley-Interscience, 2001.

[185] 岳东，彭晨，Han Q. 网络控制系统的分析和综合. 北京：科学出版社，2007.

[186] Yan H., Huang X., Wang M. et al. Delay-dependent stability criteria for a class of networked control systems with multi-input and multi-output. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 34 (3): 997-1005.

[187] Cao J., Zhong S., Hu Y. Novel delay-dependent stability conditions for a class of MIMO networked control systems with nonlinear perturbation. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197 (2): 797-809.

[188] Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network-based control. Automatica, 2008, 44 (1): 39-52.

[189] Zhang W.-A., Yu L. A Robust Control Approach to Stabilization of Networked Control Systems with Short Time-varying Delays. Acta Automatica Sinica, 2010, 36 (1): 87-91.

[190] Li J. N., Zhang Q. L., Cai M. Modelling and robust stability of networked control systems with packet reordering and long delay. International Journal of Control, 2009, 82 (10): 1773-1785.

[191] Yue D., Lam J., Wang Z. Persistent disturbance rejection via state feedback for networked control systems. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40 (1): 382-391.

[192] Tian E., Yue D., Peng C. Quantized output feedback control for networked control systems. Information Sciences, 2008, 178 (12): 2734-2749.

[193] Zhang W. A., Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52 (9): 1705-1710.

[194] Peng C., Tian Y. C., Tad M. O. State feedback controller design of networked control systems with interval time-varying delay and nonlinearity. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008, 18 (12): 1285-1301.

[195] Shi Y., Yu B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains. IEEE Trans. Automat. Contr, 2009, 54 (7): 1668-1674.

[196] Li J. G., Yuan J. Q., Lu J. G. Observer-based H_∞ control for networked nonlinear systems with random packet losses. ISA Transactions, 2010, 49 (1): 39-46.

[197] Cloosterman M. B. G., Hetel L., van de Wouw N. et al. Controller synthesis for networked control systems. Automatica, 2010, 46 (10): 1584-1594.

[198] Zhu X., Yang G. State feedback controller design of networked control systems with multiple-packet transmission. International Journal of Control, 2009, 82 (1): 86-94.

[199] Yang S., Bo Y. Output Feedback Stabilization of Networked Control Systems With Random Delays Modeled by Markov Chains. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54 (7): 1668-1674.

[200] Vatanski N., Georges J.-P., Aubrun C. et al. Networked control with delay measurement and estimation. Control Engineering Practice, 2009, 17 (2): 231-244.

[201] Xie L., Fang H., Zheng Y. Guaranteed cost control for networked control systems. Journal of Control Theory and Applications, 2004, 2 (2): 143-148.

[202] Yue D., Peng C., Tang G. Y. Guaranteed cost control of linear systems over networks with state and input quantisations. IEE Proc.-Control Theory Appl, 2006, 153 (6): 658.

[203] Xie J. S., Fan B. Q., Lee Y. S. et al. Guaranteed cost controller design of networked control systems with state delay. Acta Automatica Sinica, 2007,

33 (2): 170-174.

[204] Gao H., Chen T. Network-Based H_∞ Output Tracking Control. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53 (3): 655-667.

[205] Fu M., Xie L. The sector bound approach to quantized feedback control. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50 (11): 1698-1711.

[206] Elia N., Mitter S. K. Stabilization of linear systems with limited information. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46 (9): 1384-1400.

[207] Peng C., Tian Y. C. Networked H_∞ control of linear systems with state quantization. Information Sciences, 2007, 177 (24): 5763-5774.

[208] Naghshtabrizi P. Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems. Proc. American control conference. New York, USA, 2007: 4899-4904.

[209] Chen W. Input-to-state stability for networked control systems via an improved impulsive system approach. Automatica, 2011, 47) 4): 789-796.